Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesor :Orlando Hofer
Otoño '07

Pauta pregunta 2

2.- Resolver la ecuación integro-diferencial, utilizando transformada de Laplace:

$$x'(t) = sen\,(t) + \int_0^t \cos(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$\text{con } x(0) = 0$$

Resolución: Aplicamos Laplace a la edo enunciada, luego nos queda:

$$L(x'(t)) = L(sen\,(t)) + L(\int_0^t \cos(\tau)x(t-\tau)d\tau) \quad (1)$$

Luego el segundo término del lado derecho de la ecuación, es el Laplace de la convolución:

$$\int f(\tau)g(t-\tau)d\tau = (f * g)(t)$$

Fue visto en cátedra, que $L(f * g) = L(f)L(g)$, luego reemplazando esto en la ecuación (1):

$$L(x'(t)) = L(sen(t)) + L(\cos(t))L(x(t)) \quad (2)$$

Reemplazando por las transformadas conocidas de coseno y seno la ecuación (2) y usando que $L(x'(t)) = sL(x) - x(0^+)$

$$sL(x(t)) - x_0 = \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}L(x(t)) \quad (3)$$,ahora imponiendo que $x(0) = 0$, y desarrollando:

$$sL(x(t))\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow sL(x(t))\left(\frac{s^2+1-1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$, simplificando queda que:

$\boxed{L(x(t)) = \frac{1}{s^3}}$, aplicando antitransformada a esta solución: $x(t) = L^{-1}(\frac{1}{s^3})$.

Esta es una antitransformada conocida ya que $L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, arreglando un poco los términos:

$$x(t) = \frac{1}{2!}L^{-1}(\frac{2!}{s^3}) \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{t^2}{2}}$$