<u>Pauta P3 Control 2</u>

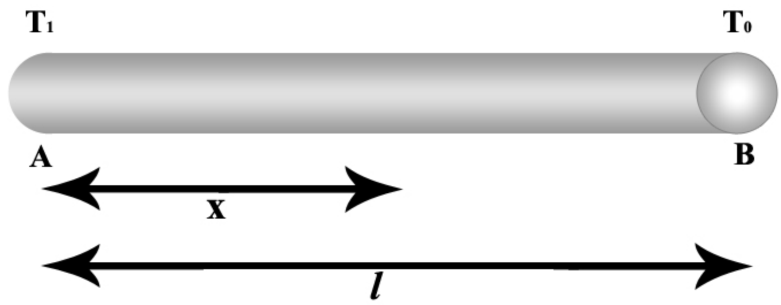
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MA26A

Semestre Otoño 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner
Ayudantes: Felipe Larraín - Álvaro Echeverría

3.- El extremo A de una barra uniforme, de longitud *l*, aislada térmicamente con su entorno, se mantiene a la temperatura constante T_1, mientras que el otro extremo B está a temperatura T_0 ($T_0 < T_1$) [*como se muestra en la figura]*. En el estado estacionario la temperatura *T* a la distancia *x* de A satisface la EDO $\frac{d^2T}{dx^2} - \alpha^2 T = -\alpha^2 T_0$. Probar que

$$T - T_0 = (T_1 - T_0)\frac{Senh(\alpha(l-x))}{Senh(\alpha l)}.$$



<u>*Sol:*</u>

Existen varias formas de resolver esta EDO y llegar a la forma particular de la solución. La primera de ellas es calculando su solución homogénea.

Sea: $\frac{d^2T}{dx^2} - \alpha^2 T = 0 \quad \Rightarrow (D^2 - \alpha^2)T = 0$ que nos lleva al polinomio característico:

$p.c.(T) = r^2 - \alpha^2$ el cual tiene raíces: $\begin{cases} r_1 = \alpha \\ r_2 = -\alpha \end{cases}$, lo que por teoría nos dice que la solución homogénea es:

$T_h = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$, luego sólo faltaría encontrar la solución particular, pero como se trata de una constante, podemos asumir por la tabla de coeficientes indeterminados (un polinomio sin grado), que la solución homogénea es una constante, por lo que $T_p = C_3$, llegando así, a que:

$$T = T_h + T_p = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3$$

Donde C_3 se puede calcular fácilmente reemplazando en la EDO Original llegando a la igualdad:

$$-\alpha^2 C_3 = -\alpha^2 T_0 \Rightarrow C_3 = T_0$$

Otra forma de encontrar la solución particular es a través de la variación de parámetros, de la forma:

$$T_p = \sum_{i=1}^{2} y_i(x) \int \frac{W_i(s, e^{\alpha}, e^{-\alpha})}{W(s, e^{\alpha}, e^{-\alpha})} ds$$
$$= e^{-\alpha x} \int \frac{e^{\alpha s}(-\alpha^2 T_0)}{-2\alpha} ds - e^{\alpha x} \int \frac{e^{-\alpha s}(-\alpha^2 T_0)}{-2\alpha} ds = C_3 = T_0$$

o a través de la fórmula de Green:

$$R(x,s) = \begin{vmatrix} e^{\alpha s} & e^{-\alpha s} \\ e^{\alpha x} & e^{-\alpha x} \end{vmatrix} = e^{\alpha(s-x)} - e^{-\alpha(s-x)}$$

$$G(x,s) = \frac{R(x,s)}{W(s, e^{\alpha}, e^{-\alpha})} = \frac{e^{\alpha(s-x)} - e^{-\alpha(s-x)}}{-2\alpha}$$

$$T_p = \int G(x,s)(-\alpha^2 T_0) ds = C_3 = T_0$$

Como vemos, todos los métodos llegan a la misma solución particular.

La última forma de llegar a ***T***, es a través del aniquilador, el cuál sólo debe aniquilar una constante, entonces de $\frac{d^2 T}{dx^2} - \alpha^2 T = -\alpha^2 T_0$, se deduce que $D(D^2 - \alpha^2) = 0$, que su polinomio característico tiene las raíces:

$$p.c.(T) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \alpha \\ r_2 = -\alpha \\ r_3 = 0 \end{cases}$$, y de donde se deduce que:

$T = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 e^{0x} = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3$ que como vimos

$C_3 = T_0$.

Cualquiera de los modos anteriormente usados para llegar a esta ecuación está correcto, pero es fácil notar que algunos son muchos más fáciles que otros.

Ahora tenemos la ecuación:

$T(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + T_0$ la cuál depende de dos constantes, pero el enunciado nos dice que en el extremo A la temperatura es siempre $\boldsymbol{T_1}$ y en el extremo B la temperatura es $\boldsymbol{T_0}$, y como el largo de la barra es *l*, podemos decir que:

$$T(0) = T_1 = C_1 e^{\alpha 0} + C_2 e^{-\alpha 0} + T_0 = C_1 + C_2 + T_0$$
$$T(l) = T_0 = C_1 e^{\alpha l} + C_2 e^{-\alpha l} + T_0$$

De la primera obtenemos la igualdad: $C_1 = T_1 - T_0 - C_2$, y de la segunda que $C_2 = -C_1 e^{2\alpha l}$. Reemplazando la segunda igualdad en la primera, se obtiene que $C_1 = \dfrac{T_1 - T_0}{1 - e^{2\alpha l}} = \dfrac{(T_1 - T_0)e^{-\alpha l}}{e^{-\alpha l} - e^{\alpha l}}$, y luego reemplazando en la segunda ecuación se obtiene que $C_2 = -\dfrac{(T_1 - T)_0 e^{\alpha l}}{e^{-\alpha l} - e^{\alpha l}}$. Ahora con ambas constantes calculadas, reemplazamos en la EDO original y obtenemos:

$$T(x) = \left[\frac{(T_1 - T_0)e^{-\alpha l}}{e^{-\alpha l} - e^{\alpha l}}\right] e^{\alpha x} + \left[-\frac{(T_1 - T)_0 e^{\alpha l}}{e^{-\alpha l} - e^{\alpha l}}\right] e^{-\alpha x} + T_0$$

$$T(x)=\frac{(T_1-T_0)}{e^{\alpha l}-e^{-\alpha l}}\left(e^{\alpha(l-x)}-e^{-\alpha(l-x)}\right)+T_0=(T_1-T_0)\frac{Senh(\alpha(l-x))}{Senh(\alpha l)}+T_0$$

Asi que se cumple que:

$$T(x)-T_0=(T_1-T_0)\frac{Senh(\alpha(l-x))}{Senh(\alpha l)}$$

Asignación de Puntaje:

- Punto Base (1 Punto)
- Encontrar por algún método la solución general de la EDO. (2 Puntos)
- Aplicar las condiciones de borde, y encontrar correctamente las dos constantes faltantes (2.5 Puntos)
- Reemplazar las constantes y hacer correcto uso algebraico para llegar a la solución general de la forma pedida (1.5 Puntos)