<u>Pauta P4 Control 1</u>

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MA26A

Semestre Otoño 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner
Ayudantes: Felipe Larraín - Álvaro Echeverría

P4.- Una partícula de masa unitaria es atraída hacia un punto fijo O por una fuerza $\mu.x$ cuando esta dista x de O en un medio que ofrece una resistencia kv^2 su movimiento, siendo v su velocidad. Probar que la EDO del movimiento es $v\frac{dv}{dx} + kv^2 + \mu x = 0$. Si la partícula esta inicialmente en reposo a una distancia a de O. Pruebe que alcanza O con una velocidad $\left[\left(\frac{\mu}{2k^2}\right)(1 - e^{2ka} + (2ka)e^{2ka})\right]^{1/2}$.

Sin pérdida de generalidad se asume un problema unidimensional, y ocupamos la Segunda Ley de Newton visto en clases. (como se dijo en el control, se asume que k es real, y no influye en la determinación ni resolución de la EDO)

$$\sum F = m\ddot{x}$$

como la masa es unitaria, y la fuerza atrae hacia el origen, se obtiene:

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\mu x - k\dot{x}^2$$

Pero por Regla de la Cadena podemos afirmar:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

en donde $\dot{x} \equiv v$, y se obtiene lo que dice el enunciado:

$$\Rightarrow v\frac{dv}{dx} + \mu x + kv^2 = 0$$

Luego, asumiendo $v \neq 0$ llegamos a la siguiente igualdad:

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} + kv + \mu x v^{-1} = 0$$

que es una EDO del tipo Bernoulli con $\alpha = -1$, y como parámetros *v* y *x*.

Sea $z(x) = v^{1-\alpha} = v^2 \Rightarrow z'(x) = (1-\alpha)vv' = 2vv'$

luego, reemplazando:

$$\Rightarrow z' + 2kz = -2\mu x$$

que es una EDO normalizada, que admite Factor Integrante

F.I.: $e^{\int 2k dx} = e^{2kx}$

$$\Rightarrow e^{2kx}z' + 2ke^{2kx} = -2\mu x e^{2kx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{2kx}z\right) = -2\mu x e^{2kx}$$

Integrando y utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int \left[\frac{d}{dx}\left(e^{2kx}z\right)\right]dx = e^{2kx}z = -2\mu\left[\int xe^{2kx}dx + C\right]$$

en donde utilizando integración por partes se obtiene:

$$\int xe^{2kx}dx = \left[\frac{xe^{2kx}}{2k} - \frac{e^{2kx}}{4k^2}\right]$$

esto implica:

$$\Rightarrow z = \frac{-2\mu}{e^{2kx}}\left[\frac{xe^{2kx}}{2k} - \frac{e^{2kx}}{4k^2}\right] + \frac{C_1}{e^{2kx}}$$

$$\Rightarrow z = -\frac{\mu x}{k} + \frac{\mu}{2k^2} + \frac{C_1}{e^{2kx}}$$

Tomando $z(x = a) = v^2(x = a) = 0$ obtenemos que:

$$C_1 = e^{2ka}\left(\frac{\mu a}{k} - \frac{\mu}{2k^2}\right)$$

Por último:

$$v(x=0) = \sqrt{z(x=0)} = \left[\frac{\mu}{2k^2} + \left(\frac{\mu a}{k} - \frac{\mu}{2k^2}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{\mu}{2k^2}\left(1 - e^{2ka} + 2kae^{2ka}\right)\right]^{1/2}$$

Asignación de Puntaje:

1.- Planteo del problema: (1 punto)

- Segunda Ley de Newton
- Caso unidimensional
- Sistema de referencia
- Coherencia de signos para llegar a la ecuación dada.

2.- Desarrollo de $\ddot{x}$ por Regla de la Cadena, para llegar a *v*, y a la ecuación dada. (0.5 puntos)

3.- EDO tipo Bernoulli. (1 punto)

- Formación de la EDO
- Identificación de la EDO tipo Bernoulli

4.- Resolución de la EDO tipo Bernoulli. (2.5 Puntos)

- Hacer el correcto cambio de variables, y su derivada
- Realizar la EDO
- Factor Integrante
- Concluir la EDO.

5.- Aplicación de la Condición Inicial. (0.5 Puntos)

- Cálculo de la Constante

6.- Cálculo final de *v(x=0)*. (0.5 puntos)

7.- Análisis del signo correcto de *k*. (1 punto extra)