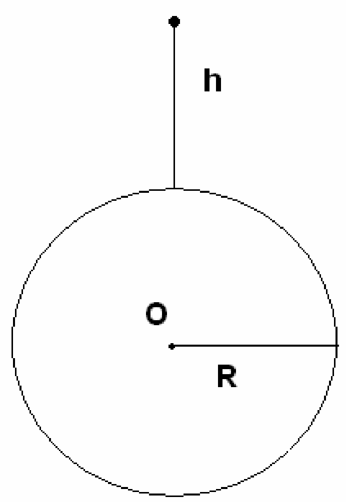
<u>Pauta P3 Control 1</u>

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MA26A

Semestre Otoño 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner
Ayudantes: Felipe Larraín - Álvaro Echeverría

P3.- Una partícula se deja caer desde una gran altura h sobre la tierra. Despreciando la resistencia del aire, probar que alcanza la tierra con velocidad $\sqrt{\dfrac{2g_1hR}{R+h}}$ siendo R el radio de la tierra.



Observamos que la partícula debe cumplir la segunda Ley de Newton, y para ello colocamos nuestro origen en el centro de la Tierra, y nos queda:

$$\sum \vec{F} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{GmM}{x^2} = m\ddot{x}$$

Obs 1: No es posible utilizar $mg = m\ddot{x}$ *ya que esto asume que g es constante y por ende* $\ddot{x}$ *también. El campo gravitacional a "gran altura" h no es constante, como se vio en cátedra.*

Obs 2: El Campo Gravitacional atrae la partícula al origen, de ahí nace el signo de la ecuación.

$$\Rightarrow -\frac{GM}{x^2} = \ddot{x}$$

pero por Regla de La Cadena podemos afirmar que:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

Gracias a esto, podemos afirmar:

$$\Rightarrow -\frac{GM}{x^2} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

con lo que obtenemos una EDO a variables separables, la cual ocupando lo visto en clases, e integrando con los correspondientes límites de integración (dado en las condiciones iniciales), obtenemos:

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{x}} \dot{x}d\dot{x} = \int_{R+h}^{R} -\frac{GM}{x^2}dx$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{2GMh}{R(R+h)}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}}$$

ahora tomando $g = \frac{GM}{R^2}$ se llega al resultado que queríamos obtener.

OBS3: g si es constante en este caso.

$$\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2ghR}{R+h}}$$

Observaciones generales:

- Se puede tomar como origen la superficie de la Tierra, pero en ese caso se obtiene $-\frac{GM}{(R+x)^2} = \ddot{x}$ y hay que integrar con nuevos límites, entre h y 0. El resultado final es equivalente, y por ende correcto.
- Se podría argumentar de que se trata de un campo conservativo, y ocupar argumentos de energía, y obtener el mismo resultado sin necesidad de platear una ecuación diferencial, pero tal argumento NO fue visto en clases, y por tanto se habría tenido que argumentar primero porque esta fuerza es conservativa (Ocupando Rotor o que la fuerza proviene de la gradiente de un campo), cosa que si no se hizo, no podrá ser evaluado en una curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Asignación de puntaje

1.- Planteo de la EDO: (2 puntos)

- Sistema de Referencia
- Coherencia de signos
- Sumatoria de fuerzas

2.- Resolución de EDO: (3 puntos)

- Regla de la Cadena
- Variables separables
- Correcto uso de los límites de integración (o cálculo de la constante)
- Cálculo acertado.

3.- Terminar la demostración: (1 punto)

- Uso de g constante.

4.- Conservación de energía: (1 punto extra)

- Demostrar que la fuerza es conservativa y que se puede utilizar conservación de la energía, para corroborar el resultado de la EDO.