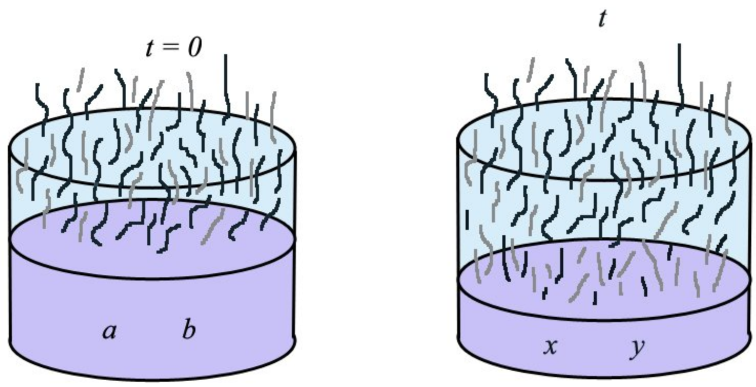
<u>Pauta P2 Control 1</u>

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MA26A

Semestre Otoño 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner
Ayudantes: Felipe Larraín - Álvaro Echeverría

P2.- Se ha observado que si cantidades a y b de dos líquidos están en ebullición en el mismo recipiente, la relación de las cantidades que se evaporan de ambos líquidos es proporcional a la relación de las cantidades que quedan. Probar que si x e y son las cantidades que quedan de a y b en el tiempo t respectivamente, entonces se cumple que $y\dfrac{dx}{dt} = kx\dfrac{dy}{dt}$ y en consecuencia se tiene $b^k x = ay^k$.



Definamos:

- a : Cantidad inicial de cierto líquido en ebullición.
- b : Cantidad inicial de otro líquido en ebullición junto al anterior.
- x : Cantidad que queda del primer líquido en cierto instante t.
- y : Cantidad que queda del segundo líquido en cierto instante t.
- Δx : x_f - x_i.
- Δy : y_f - y_i.
- Δt : t_f - t_i.
- k : Constante de proporcionalidad.

Según estas definiciones podemos denotar como $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ como la variación de la cantidad del primer líquido y del segundo líquido, respectivamente, en cierto intervalo de tiempo.

Luego $\underset{\Delta t \to 0}{Lím} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ es la variación de la cantidad del primer líquido en cierto instante *t*. Análogamente, $\underset{\Delta t \to 0}{Lím} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$ es la variación de la cantidad del segundo líquido en cierto instante *t*. Cabe notar que estas variaciones corresponden a la cantidad de líquido que se evapora en cierto instante *t* del primer y segundo líquido respectivamente.

El enunciado dice que la **relación** entre las cantidades que se evaporan de ambos líquidos es proporcional a la **relación** a las cantidades que quedan, lo que implica:

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)} = k\frac{x}{y}$$

con lo que se cumple que:

$$y\frac{dx}{dt} = kx\frac{dy}{dt}$$

que es una EDO a variables separables, que además conocemos sus límites de integración, por tanto queda:

$$\int_a^x \frac{1}{x}dx = k\int_b^y \frac{1}{y}dy$$

$$\Rightarrow Ln(x) - Ln(a) = k\left[Ln(y) - Ln(b)\right]$$

$$\Rightarrow Ln\left(\frac{x}{a}\right) = k\left[Ln\left(\frac{y}{b}\right)\right] = Ln\left(\left(\frac{y}{b}\right)^k\right) \qquad / e^{()}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \left(\frac{y}{b}\right)^k \Rightarrow xb^k = ay^k$$

Asignación de puntaje:

1.- Plantear la EDO propuesta: (2.5 puntos)

- Analizar las variables, en especial que significa $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$, que son variaciones en un instante, y no cantidad, ni lo que varía hasta ese instante.
- Analizar el enunciado, y observar que significa *relación*.
- Plantear las relaciones y la igualdad de la proporcionalidad con su constante respectiva.
- Platear la EDO propuesta.

2.- Desarrollo de la EDO: (3.5 puntos)

- Analizar porqué podemos olvidarnos de los *dt* (Regla de la Cadena, o integración apropiada) (0.5 extras)
- Observar que se trata de una EDO a variables separables.
- Integrar con sus correspondientes límites (o agregar constante y después calcularla con la CI)
- Llegar a un resultado acertado.