Pauta P1 Control 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MA26A

Semestre Otoño 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner
Ayudantes : Felipe Larraín - Álvaro Echeverría

P1.- Una curva integral $x \to y = u(x)$ de la EDO lineal $y'' - 4y' + 29y = 0$ corta una curva integral $x \to y = v(x)$ de la EDO lineal $y'' + 4y' + 13y = 0$ en el origen. Las dos curvas tienen la misma pendiente en el origen. Hallar $u(x)$ y $v(x)$ si $u'(\pi/2) = 1$

Para la primera ecuación, buscaremos soluciones de la forma $y = Ae^{\alpha x}$, entonces el polinomio característico queda:

$$y'' - 4y' + 29y = 0 \Rightarrow D^2 - 4D + 29 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 29 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 116}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i$$

Para la segunda ecuación, el polinomio característico nos queda de la siguiente forma:

$$y'' + 4y' + 13y = 0 \Rightarrow D^2 + 4D + 13 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + 13 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

Luego las soluciones son :

$$u(x) = Ae^{2x}\cos(5x) + Be^{2x}sen(5x)$$
$$v(x) = Ce^{-2x}\cos(3x) + De^{-2x}sen(3x)$$

Condiciones del problema:

1. $u(x=0)=0$
2. $v(x=0)=0$
3. $u'(\pi/2)=1$
4. $u'(x=0)=v'(x=0)$

Luego $u(x=0)=A=0 \Rightarrow u(x)=Be^{2x}sen(5x)$

$v(x=0)=C=0 \Rightarrow v(x)=De^{-2x}sen(3x)$

Ahora analicemos para el caso $u'(x=0)=v'(x=0)$:

$$u'(x)=2Be^{2x}sen(5x)+5Be^{2x}\cos(5x) \Rightarrow u'(x=0)=5B$$

$$v'(x)=-2De^{-2x}sen(3x)+3De^{-2x}\cos(3x) \Rightarrow v'(x=0)=3D$$

$$\therefore 5B=3D \Rightarrow B=\frac{3D}{5}$$

Por último :

$$u'(\pi/2)=1 \Rightarrow B(2e^{\pi}sen(5\pi/2)+5e^{\pi}\cos(5\pi/2))=1$$

$sen(5\pi/2)=1$ y $\cos(5\pi/2)=0$, entonces queda:

$$\Rightarrow 2Be^{\pi}=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2e^{\pi}}$$

$$\Rightarrow D=\frac{5}{3}B \Rightarrow D=\frac{5}{6e^{\pi}}$$