<u>Tarea Opcional 2</u>

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MA26A

Semestre Otoño 2007

Prof. Cátedra: Orlando Hofer - Prof. Auxiliar: Carlos Hübner

<u>PARTE I: Modelamiento en problemas de Tanques.</u>

1.- Considere un tanque que contiene 1000 [l] de agua, dentro del cual una solución salada de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de 6 [l/min]. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior del tanque a una velocidad de 6 [l/min]. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de 10 [g/l], determine cuándo será de 5 [g/l] la concentración de sal en el tanque.

2.- En el problema anterior, supóngase que la salmuera sale del tanque a razón de 5 l/m en lugar de 6 [l/m], con todas las demás condiciones iguales. Determine la concentración de sal en el tanque en función del tiempo.

3.- Una solución de salmuera fluye a razón constante de 8 [l/m] hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 100 [l] de solución de salmuera en la cual están disueltos 5 [Kg] de sal. La solución en el interior del tanque se mantiene bien agitada y fluye al exterior con la misma rapidez. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de 0,5 [Kg/l], determine la cantidad de sal presente en el tanque al cabo de t minutos. ¿Cuándo alcanzará la concentración de sal en el tanque el valor de 0, 2 [Kg/l]?

4.- Una solución de salmuera fluye a razón constante de 4 [l/m] hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 100 [l] de agua. La solución en el interior del tanque se mantiene bien agitada y fluye al exterior a razón de 3 [l/m]. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el tanque es de 0, 2 [Kg/l], determine la cantidad de sal contenida en el tanque al cabo de t minutos. ¿En qué momento la concentración de sal contenida en el tanque será de 0, 1 [Kg/l]?

5.- Una solución de ácido nítrico fluye a razón constante de 6 [l/m] hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 200 [l] de una solución de ácido nítrico al 0,5 [%]. La solución contenida en el tanque se mantiene bien agitada y fluye al exterior del mismo a razón de 8 [l/m]. Si la solución que entra en el tanque es de 20 [%] de ácido nítrico, determine la cantidad de ácido nítrico presente en el tanque al cabo de t minutos. ¿En qué momento el porcentaje de ácido nítrico contenido en el tanque será del 10 [%]?

PARTE II: Modelamiento de isótopos radiactivos y vida media.

6.- *(Robert L. Borrelli- Courtney S. Coleman, Differential Equations, A Modeling Approach, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632)*

Se sabe que ciertos elementos o sus isótopos son inestables, desintegrándose en isótopos de otros elementos mediante emisión de partículas α, partículas β o fotones. Se dice que tales elementos son radiactivos. Por ejemplo, un átomo de radio se desintegra en un átomo de radón, emitiendo una partícula α en el proceso, $^{226}Ra \xrightarrow{\alpha} Rn$. La desintegración de un único núcleo radiactivo es un proceso aleatorio, y el tiempo exacto de desintegración no puede ser determinado con exactitud. Sin embargo pueden hacerse afirmaciones concretas en el proceso de desintegración de un gran número de átomos radiactivos.

La cuestión es:

¿Cuántos núcleos hay en una muestra de un elemento radiactivo en el instante de tiempo *t*?

Nuestro sistema es la colección de núcleos radiactivos en la muestra, y lo único que nos interesa medir es el número de núcleos radiactivos en el tiempo *t*. No es obvio, sin embargo, cuál es la ley de desintegración. Hay numerosas evidencias experimentales que sugieren que la siguiente ley es cierta:

En una muestra que contiene un gran número de núcleos radiactivos, la disminución del número de núcleos radiactivos en un intervalo de tiempo es directamente proporcional a la longitud del intervalo de tiempo y al número de núcleos presente en el tiempo inicial.

Si denotamos por $x(t)$ el número de núcleos radiactivos en el tiempo t y el intervalo de tiempo por Δt, la ley se traduce en:

$$x(t+\Delta t) - x(t) = -ax(t)\Delta t$$

donde a es la constante estrictamente positiva de proporcionalidad.

El modelo matemático anterior para la ley nos ayuda a darle su justo valor.

Por una parte $x(t)$ y $x(t+\Delta t)$ deben ser enteros, pero $-a\Delta t$ puede no ser un entero. Si queremos mantener la ley debemos idealizar el fenómeno real suponiendo que $x(t)$ es una cantidad continua. Por ejemplo, midiendo $x(t)$en gramos. Incluso siendo $x(t)$ continuo la ley pudiera no ser cierta para valores de *t* grande, ya que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Además la ley no tiene sentido si Δt es tan pequeño que ningún núcleo se desintegra en el intervalo de tiempo Δt. El fallo de la ley para intervalos grandes de tiempo puede ser ignorado, porque sólo estamos interesados en un comportamiento local (en el tiempo). Las dificultades con *t* pequeño son más preocupantes.

Sólo podemos esperar que el procedimiento matemático que se presenta a continuación nos conduzca a un modelo matemático en la que la $x(t)$ teórica sea razonablemente próxima a la experimental.

Si dividimos ambos lados de

$$x(t+\Delta t) - x(t) = -ax(t)\Delta t$$

por Δt y tomamos límite cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos $\boldsymbol{x'(t) = -ax(t)}$.

Así que podemos decir: La velocidad de desintegración del elemento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible. Resolver la ecuación diferencial.

La vida media del elemento radiactivo, $t_{1/2}$, es el tiempo que debe transcurrir para que la mitad de los núcleos radiactivos se desintegre.

Calcule la constante *a* conociendo la vida media.

7.- La velocidad de desintegración del elemento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad de materia disponible. Supóngase que en 25 años el 1,1 [%] de una cierta cantidad de radio se ha desintegrado. ¿Cuál es la vida media del radio?

8.- Si la vida media de una sustancia radiactiva es 1000 años, ¿qué fracción de ella permanece después de 100 años?

PARTE III: Ley de enfriamiento.

9.- Según la ley de Newton del enfriamiento, si un objeto a temperatura T se coloca en un medio que se encuentra a la temperatura constante T_M, entonces la razón de cambio de T es proporcional a la diferencia de temperatura $T - T_M$. Esto da lugar a la EDO:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_M)$$

Resuelva la EDO para T con k positiva.

10.- Un termómetro que marca 100 [grados] se coloca en un medio que se encuentra a una temperatura constante de 70 [grados]. Al cabo de 6 [min], el termómetro marca 80 [grados]. ¿Cuál es la lectura al cabo de 20 [min]?

11.- Una piscina se encuentra al aire libre, y su temperatura depende directamente de la temperatura ambiente del lugar. Suponga que la temperatura del lugar tome la forma de $T_M(t) = T_M^0 + ASen(\omega t)$, donde A y T_M^0 son constantes. Vuelva a resolver la EDO de la ley de enfriamiento de Newton, y calcule la temperatura de la piscina en todo instante si su temperatura inicial era de 0 [grados].

12.- Un objeto tiene temperatura inicial de 40 [grados] y se encuentra en un ambiente de 20 [grados], pero misteriosamente, su constante de enfriamiento k es variable en el tiempo, talque $k(t)=Cos(t)$. Calcule su temperatura en cualquier instante de tiempo. ¿Cuánto se demora en tener la temperatura del ambiente?

PARTE IV: Modelamiento de Poblaciones.

13.- En el estudio de poblaciones humanas, la premisa de que la tasa de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño parece razonable.

Sin embargo la hipótesis de una tasa de mortalidad nula es, desde luego, errónea. Suponiendo que las personas fallecen por causas naturales, se podría esperar que la tasa de mortalidad fuera también proporcional al tamaño de la población.

Establezca un modelo matemático para la población teniendo en cuenta los factores anteriores. Resuelva la EDO del modelo.

14. Un poblado se encuentra cerca de unas afamadas playas que suelen ser visitadas por veraneantes en la época de verano. Asimismo, en invierno, muchos de sus pobladores se van a la nieve a descansar. Si a lo largo del tiempo se mantiene la cantidad de pobladores que les gusta ir a la nieve, entonces encuentre un modelo matemático de población similar al del problema anterior, pero que se agregue una función $Q(t)=Asen(t)$ que represente los veraneantes que se encuentre en el poblado en el verano y los pobladores que se van a la nieve en el invierno.

15.- Muchos países (como Chile) poseen inmigrantes que llegan año a año y que se integran a la población. Suponiendo que llegan a tasa constante en el tiempo, encuentre un modelo simple poblacional.

16.- Algunos lugares con poco territorio o poca capacidad económica para sustentar a los lugareños, tienen un límite máximo de personas que pueden vivir en el lugar. Si la población supera a ese límite, la gente deja de tener hijos, ya que no los pueden sustentar, y la mortalidad hace que la población se autorregule. Encuentre un modelo de población y resulvalo.

PARTE V: Problemas varios.

17.- Una máquina quita la nieve uniformemente, de modo que su velocidad de avance resulta inversamente proporcional a la cantidad de nieve. Se supone que nieva con regularidad, que a las 12 a.m. comienza a funcionar la máquina, que recorre en la primera hora 2 [Km]. y en la segunda hora 1 [Km]. ¿A que hora comenzó a nevar?

18.- En un reactor químico se ha introducido agua pura con una cierta cantidad de contaminante A para eliminar, y se ha hecho circular a través de la masa líquida una corriente de gas compuesta por una mezcla de oxígeno-ozono.

Un ejemplo sencillo de mecanismo de reacción es:

$$O_3 + z_a A \xrightarrow{K_p} I$$

, que es la reacción directa entre 1 [mol] de ozono y z_A [moles] de contaminante A. I son productos inocuos o inertes. k_p es la constante cinética de la eliminación directa del compuesto A, que es conocida para muchos contaminantes.

Si $C_A(t)$ es la concentración del contaminante en [moles/l] y $C_{O_3}(t)$ la del ozono, suponemos que el balance de A es:

$$\frac{dC_A}{dt}(t) = -k_v C_A(t) - k_p C_{O_3}(t) C_A(t)$$

donde $\frac{dC_A}{ct}(t)$ es la velocidad de desaparición del compuesto A y k_v la constante cinética de volatilidad del compuesto A.

Si en una primera aproximación despreciamos el término $k_p C_{O_3}(t) C_A(t)$ obtenemos

$$\frac{dC_A}{dt}(t) = -k_v C_A(t)$$

Sin embargo, en la vida real tenemos que considerar fugas a través de válvulas, llaves semiabiertas, etc., que ocasionan que parte del contaminante no reaccione con el ozono. Llamaremos a este fenómeno goteo de A en el reactor. Entonces el balance de A debe ser modificado a:

$$\frac{dC_A}{dt}(t) = \frac{a(t)}{V} - k_v C_A(t)$$

donde $a(t)$ denota la tasa de goteo de A en el reactor y V su volumen.
Resuelva la EDO.

19.- Un capitán de un barco ballenero se encuentra a una distancia d (positiva) en el eje x de un sistema de coordenadas empleado por este tipo de embarcaciones. En ese instante observa que una ballena se sumerge justo en el origen de tal sistema de coordenadas. El capitán, experto en ballenas, sabe que esta tiene una velocidad v en promedio y que su embarcación tiene el doble de esa velocidad, pero el no sabe que dirección tomo la ballena al momento de sumergirse, pero el estudió ingeniería, y por tanto ocupa la siguiente estrategia. Continúa su viaje por el eje x en dirección al origen, y cuando la distancia al origen sea la misma que la distancia al origen de la ballena, entonces el empieza a realizar una espiral con tal que en algún minuto el se encuentre con la ballena. Obtenga la ecuación de esa espiral.

20.- Si la ballena toma una dirección desconocida, pero se sabe que se dirige por los cuadrantes 2 y 3 del sistema de coordenadas, entonces el capitán toma una decisión similar a la anterior, pero con una diferencia por razones de poder capturar más rápido la ballena ¿Cuál es la diferencia?