CONTROL 2 MA 26A, 2007/1

Prof. M. del Pino, Prof. Aux. J. Campos, R. Cortez
Tiempo: 3 hrs.

(1) Verifique que 0 es un punto singular regular para la ecuación de Bessel de orden $\alpha > 0$,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0\,, \quad x > 0\,,$$

y encuentre, mediante el método de Frobenius, una solución en serie de potencias en torno a 0, con coeficientes explícitos.

(2) (a) Considere la ecuación de coeficientes constantes reales,

$$a_N\frac{d^Ny}{dx^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}y}{dx^{N-1}} + \cdots + a_0y = e^{\alpha x}\cos\beta x. \tag{1}$$

Sea

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} a_k\lambda^k$$

y suponga que $\mu = \alpha + i\beta$ es una raiz de p de multiplicidad 3, esto es, $p(\mu) = p'(\mu) = p''(\mu) = 0, \quad p'''(\mu) \neq 0$. Demuestre que

$$y_p(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{x^3e^{\mu x}}{p'''(\mu)}\right)$$

es una solución particular de la ecuación (1). Indicación: pruebe por inducción que para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene que

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^3e^{\mu x}) \;=$$

$$e^{\mu x}\left(\mu^kx^3 + 3k\mu^{k-1}x^2 + 3k(k-1)\mu^{k-2}x + k(k-1)(k-2)\mu^{k-3}\right).$$

(b) Encuentre la solución general de la ecuación

$$y^{(6)} - 12y^{(5)} + 63y^{(4)} - 184y''' + 315y'' - 300y' + 125y = e^{2x}\cos x,$$

usando el hecho que $2 + i$ es una raiz de multiplicidad 3 para el polinomio característico asociado.

(3) (a) Sean p y q funciones continuas en $[1, \infty)$. Suponga que la ecuación

$$y'' + p(x)y = 0, \quad x \in [1, \infty)$$

tiene una solución no nula que es oscilatoria. Demuestre que si $q(x) \geq p(x)$ para todo x, entonces toda solución no nula de

$$y'' + q(x)y = 0, \quad x \in [1, \infty)$$

también es oscilatoria.

(b) Considere el problema de condiciones de borde

$$x^2y'' + p(x)y = g(x)$$
$$y(a) = 0 = y(b)$$

con $p(x)$, $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$, donde $0 < a < b$. Demuestre que si $p(x) < \frac{1}{4}$ para todo x, entonces este problema posee solución, y ésta es única.