La Función Escalón

A continuación definiremos una función muy útil para trabajar con ecuaciones diferenciales ordinarias en las cuales el lado derecho es una función definida por pedazos.

Definición. Dado $a \geq 0$, definimos la función escalón $U_a(t)$ como

$$U_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

La propiedad fundamental de la función recién definida en relación a la Transformada de Laplace es la siguiente:

Proposición 1. Dada una función f continua por tramos y de orden exponencial y $a \geq 0$, se cumple

$$\mathcal{L}(f(t-a)U_a(t))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))(s).$$

Demostración. Por definición de Transformada de Laplace, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t-a)U_a(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)U_a(t)dt \\
&= \int_{-a}^\infty e^{-s(r+a)} f(r)U_a(r+a)dr \\
&= \int_{-a}^0 e^{-s(r+a)} f(r)U_a(r+a)dr + \int_0^\infty e^{-s(r+a)} f(r)U_a(r+a)dr.
\end{aligned}$$

Sin embargo, $U_a(r+a)$ vale 0 para $r < 0$ y vale 1 para $r \geq 0$. Por lo tanto, $U_a(r+a)$ se anula en todo el rango de la primera integral y vale 1 en el rango de la segunda integral, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t-a)U_a(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-s(r+a)} f(r)dr \\
&= e^{-sa}\int_0^\infty e^{-sr} f(r)dr \\
&= e^{-sa}\mathcal{L}(f(t))(s).
\end{aligned}$$

□

Veamos una aplicación de la propiedad recién demostrada.

Ejemplo. Calculemos la transformada de Laplace inversa de la función

$$\frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s^2+1},$$

donde f está definida como

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2k \leq t < 2k+1, \text{ para un cierto } k = 0, 1, ..., 9 \\ 0 & \text{si } 2k+1 \leq t < 2k+2, \text{ para un cierto } k = 0, 1, ..., 9 \\ 1 & \text{si } t \geq 20, \end{cases}$$

es decir, $f(t)$ es una función que alterna entre 1 y 0, dando saltos en los enteros, hasta llegar a 20, donde se queda pegada en 1. No es difícil ver que $f(t)$ se puede escribir en términos de funciones escalón como:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{20} (-1)^k U_k(t).$$

Luego:

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \sum_{k=0}^{20} (-1)^k \mathcal{L}(U_k(t))(s).$$

Aplicando la propiedad, tenemos que para cualquier $a \geq 0$

$$\mathcal{L}(U_a(t))(s) = \mathcal{L}(1 \cdot U_a(t))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(1) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s^2+1} &= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k e^{-ks} \frac{1}{s(s^2+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k e^{-ks} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k e^{-ks} \mathcal{L}(1 - \cos t)(s). \end{aligned}$$

Pero aplicando nuevamente la propiedad, tenemos que

$$e^{-ks}\mathcal{L}(1 - \cos(t))(s) = \mathcal{L}((1 - \cos(t-k))U_k(t))(s).$$

Reemplazando en nuestro desarrollo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s^2+1} &= \sum_{k=0}^{20} (-1)^k \mathcal{L}((1 - \cos(t-k))U_k(t))(s) \\ &= \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{20} (-1)^k (1 - \cos(t-k))U_k(t) \right)(s). \end{aligned}$$

Aplicando transformada inversa en lo anterior, se concluye que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}(f(t))(s)}{s^2+1} \right)(t) = \sum_{k=0}^{20} (-1)^k (1 - \cos(t-k))U_k(t).$$