MA26A – Guía para el Control 2

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Juan Campos, Roberto Cortez.

11 de mayo de 2007

P1. Encuentre la solución general de los siguientes problemas:

(a) $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0$
(b) $y'''' + 2y'' + y = 0$
(c) $y''' - 3y'' + 4y = te^{2t} - \sin(t)$
(d) $y'''' + 8y'' + 16y = \cos^2(t)$.

P2. Considere la ecuación de tercer orden

$$y''' + ay'' + by' + cy = e^{rt},$$

donde a, b, c, r son constantes reales o complejas. Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de esta ecuación. Muestre que si r es tal que $p(r) = 0$, $p'(u) \neq 0$ entonces esta ecuación tiene solución particular

$$y(t) = \frac{t}{p'(r)} e^{rt}.$$

P3. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales

(a) $y''' - 6y'' - 11y' - 6y = e^{4t}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
(b) $3y'' + 4y' + y = \sin(t)e^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
(c) $y'' + k^2 y = \sin(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

P4. Verifique que $y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sin(x)$ e $y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cos(x)$ son soluciones de ecuación homogénea asociada a

$$4x^2 y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 12x^{\frac{3}{2}} \sin(x).$$

Determine la solución y de esta ecuación tal que

$$\lim_{x \to \pi/2} x^{\frac{1}{2}} y = \lim_{x \to \pi} x^{\frac{1}{2}} y = 0.$$

P5. Demuestre que las funciones $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x \log x$ e $y_3(x) = x^2$ son soluciones l.i. de la ecuación

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0,$$

y encuentre la solución particular que satisface $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ e $y''(1) = 0$.

P6. Encuentre la solución general de $y''' + 9y' = x \sin(x) + x^2 e^{3x}$.

P7. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones, usando series de potencias en torno al origen:

(a) $y'' - (x+1)y' - y = 0$

(b) $(x+2)y'' + xy' - y = 0$

(c) $y'' - xy' - (x+2)y = 0$

(d) $y'' - 4xy' - 4y = e^x$.

P8. Para cada ecuación encuentre todos los puntos singulares y clasifíquelos en regulares e irregulares. Si la ecuación posee algún punto singular regular, elija uno de ellos y resuélvala con el método de Frobenius en torno a tal punto:

(a) $xy'' - (x+3)^{-2}y = 0$

(b) $(x^2-9)^2 y'' + (x+3)y' + 2y = 0$

(c) $x^3 y'' + 4x^2 y' + 3y = 0$

(d) $x^3(x^2-25)(x-2)^2 y'' + 3x(x-2)y' + 7(x+5)y = 0$.

P9. Considere la ecuación

$$x^2 y'' + (3x-1)y' + y = 0.$$

Aplique el método de Frobenius en torno a $x_0 = 0$ y compruebe que se obtiene la "solución" en series de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

Pruebe que el radio de convergencia de esta serie es 0. Explique.

P10. Sea la ecuación $y'' + xy' + y = 0$.

(a) Encuentre, usando el método de Frobenius, 2 soluciones l.i. y_1, y_2.

(b) Pruebe que $y_1(x)$ corresponde a la expansión en serie de potencias de $e^{-x^2/2}$. Utilizando el método de reducción de orden, encuentre una segunda solución l.i. con respecto a y_1. Pruebe que esta solución corresponde a y_2.

P11. Considere

$$y'' + xy = 0$$

. Esta ecuación se conoce como *ecuación de Airy*, y sus soluciones se denominan *funciones de Airy*.

(a) Encuentre las funciones de Airy en la forma de series de potencias.

(b) Utilice lo anterior para escribir la solución general de $y'' - xy = 0$.

P12. La *Ecuación de Chebychev* es

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0$$

, donde $p \in \mathbb{R}$ es una constante.

(a) Encuentre dos soluciones l.i en la forma de series de potencias válidas para $|x| < 1$.

(b) Demustre que si $p \in \mathbb{N}$, entonces la solución general será polinómica de grado p.

P13. Encuentre, usando el método de Frobenius, una solución para la ecuación

$$4x^2y'' - 8x^2y' + (4x^2 + 1)y = 0.$$

P14. Muestre que toda solución de

$$y'' + \frac{1}{x}y + y^3 = 0 \qquad x \in [1, \infty)$$

tiene infinitos ceros en $[1, \infty)$.

P15. Sea y una solución no idénticamente nula de

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad \forall\, x \in [0, \infty)$$

con p y q funciones continuas en $[0, \infty)$. Suponga que $\exists R > 0$ tal que $q(x) < 0\ \forall\, x > R$. Demuestre que y tiene a lo más un número finito de ceros.

P16. Considere la ecuación $y'' + x^2 y = 0$, y sea $a > 0$ un cero de y. Muestre que existe $b \in]a, a + \pi/a[$ que también es cero de y.

P17. Considere la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{a(x)}{x^2}y = 0, \quad x > 0,$$

donde $\int_1^\infty \frac{a(x)}{x}dx = \infty$ y $a(x) > 0$ para $x > 0$. Muestre que y tiene infinitos ceros.

P18. (a) Considere u y v soluciones positivas de

$$u'' + a(x)u = 0 \tag{1}$$
$$v'' + b(x)v = 0, \tag{2}$$

donde $a(x) > b(x)$ para $x > 0$. Suponga que $u(0) = v(0)$ y $u'(0) = v'(0)$. Muestre que $u(x) < v(x)$ $\forall x > 0$.

(b) Sean $a(x)$ y $b(x)$ funciones continuas en $\mathbb{R}$, con $a(x) > b(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Suponga que las funciones y, z no son idénticamente nulas y satisfacen las ecuaciones (1) y (2) respectivamente. Suponga también que $y'(0) = z'(0) = 0$ y que para cierto $x_0 \in [0, 1]$ se tiene que $y(x_0) = 0$. Muestre que existe $x_1 \in]0, x_0[$ tal que $z(x_1) = 0$.

(c) Use el ítem anterior para probar la siguiente afirmación: si $0 < a(x) < \pi^2/4$ para todo $x \in [0, 1]$ entonces el problema de condiciones de borde

$$\begin{cases} y'' + a(x)y = 0 & x \in [0, 1] \\ y'(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

tiene sólo la solución trivial.

P19. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable, tal que $f(0) = 0$ y que para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$b^2 < f'(s) < a^2 \qquad \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

Sea y solución de

$$y'' + f(y) = 0$$

y sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ceros consecutivos de y. Pruebe que

$$\frac{\pi}{a} < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{b}.$$

P20. Considere el problema de condiciones de borde

$$\begin{cases} y'' + p(x)y = g(x) & x \in [a, b] \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases}$$

donde p, g son funciones continuas en $[a, b]$. Demuestre que si $p(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces este problema posee solución y ésta es única. *Indicación:* cuando $g \equiv 0$, multiplique la ecuación por y e integre por partes.

P21. (a) Considere el problema de condiciones de borde de cuarto orden

$$\begin{cases} y'''' + p(x)y = g(x) & x \in [0, 1] \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0, \end{cases}$$

donde p, g son funciones continuas en $[0, 1]$. Suponga que este problema para $g \equiv 0$ tiene solo la solución $y \equiv 0$. Demuestre que el problema posee solución y es única.

(b) Considere el problema

$$\begin{cases} y'''' - \alpha^4 y = g(x) & x \in [0, 1] \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0, \end{cases}$$

Muestre que si $\alpha \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces este problema tiene solución única para cualquier función g continua en $[0, 1]$.