Clase auxiliar MA26A-04 15-03-2007

Roberto Amaro Cortez Milán.

P1 Resuelva usando el método de separación de variables.

(a) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = x$

(b) $e^{x} y\, dy - (e^{-y} + e^{-2x-y})\, dx = 0$

(c) $(yx^2 - y)\, dy + (y+1)^2\, dx = 0$

Solución:

(a) Recordemos que el método de separación de variables consiste en apartar todos los 'y' junto con 'dy' en un lado de la ecuación, y todos los 'x' junto con 'dx' en el otro; al final se integra:

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = x$$

$$dy = \frac{x\,dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \frac{x}{x+1}\,dx + C$$

donde $\int(\cdot)$ se refiere a una primitiva cualquiera (el resto de las primitivas están incluidas en C). Luego:

$$y = \int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx + C$$

$$= x - \ln|x+1| + C$$

(b) $e^{x} y \, dy - (e^{-y} + e^{-2x-y})\, dx = 0$

$$e^{x} y \, dy = e^{-y} (1 + e^{-2x})\, dx$$

$$\int e^{y} y \, dy = \int (e^{-x} + e^{-3x})\, dx + c$$

$$\Rightarrow \quad e^{y}(y-1) = -e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-3x} + c$$

A veces, como en este caso, uno obtiene una ecuación algebraica para 'y', pero no es posible despejar explícitamente "y" en función de 'x'. Si ese es el caso, se deja la expresión tal cual.

(c) $(yx^2 - y)\, dy + (y+1)^2 dx = 0$

$$y(x^2-1)\, dy = -(y+1)^2 dx$$

$$\int \frac{y}{(y+1)^2} dy = \int \frac{1}{1-x^2} dx + c$$

Donde $$\int \frac{y}{(y+1)^2} dy = \int \frac{1}{y+1} dy - \int \frac{1}{(y+1)^2} dy$$

$$= \ln|y+1| + \frac{1}{y+1}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1/2}{1+x} dx + \int \frac{1/2}{1-x} dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln|1+x| - \tfrac{1}{2} \ln|x-1|$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{x-1}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y+1| + \frac{1}{y+1} = \tfrac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{x-1}\right| + c$$

P2 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

(a) $\operatorname{sen}(x)\,(e^{-y}+1)\,dx = (1+\cos(x))\,dy \quad , \quad y(0)=0$

(b) $\dfrac{dx}{dy} = 4(x^2+1) \quad , \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

(c) $y' + 2y = 1 \quad , \quad y(0) = \frac{5}{2}$

<u>Solución:</u> (a) La idea es resolver la ecuación dejando un parámetro libre (la constante c) y después ajustar el parámetro para que se satisfagan las condiciones iniciales.

$$\operatorname{sen}(x)\,(e^{-y}+1)\,dx = (1+\cos(x))\,dy$$

$$\int \frac{1}{e^{-y}+1}\,dy = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,dx + c$$

donde $\displaystyle\int \frac{1}{e^{-y}+1}\,dy = \int \frac{e^y}{1+e^y}\,dy = \ln(1+e^y)$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,dx = -\ln(1+\cos x)$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1+e^y) = -\ln(1+\cos x) + c_1$$

Como $y(0)=0$

$$\Rightarrow \quad \ln(1+e^0) = -\ln(1+\cos 0) + c_1$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 2\ln 2 = \ln 4$$

Podemos despejar 'y':

$$\ln(1+e^y) = -\ln(1+\cos(x)) + \ln 4$$
$$= \ln\left(\frac{4}{1+\cos x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 1+e^y = \frac{4}{1+\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad y = \ln\left(\frac{4}{1+\cos x} - 1\right)$$

(b) La otra forma es calcular la integral DEFINIDA utilizando como extremo inferior el punto de la condición inicial:

$$\frac{dx}{dy} = 4(x^2+1) \quad \Rightarrow \quad x'(y)\frac{1}{x(y)^2+1} = 4 \quad \Big/ \int_{\pi/4}^{y} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\pi/4}^{y} x'(t)\frac{1}{x(t)^2+1}\,dt = \int_{\pi/4}^{y} 4\,dt$$

Hacemos el c.v. $u = x(t) \Rightarrow du = x'(t)dt$

$t = \pi/4 \Rightarrow u = 1, \quad t = y \Rightarrow u = x(y)$

$$\Rightarrow \int_1^{x(y)} \frac{1}{u^2+1}\,du = 4(y - \pi/4)$$

$$\arctan(x(y)) - \underbrace{\arctan(1)}_{=\pi/4} = 4(y - \pi/4)$$

$$\Rightarrow \quad x(y) = \tan\left(4y - \frac{3\pi}{4}\right).$$

(c) Lo hacemos de la primera forma, que resultó más sencilla.

$$y' + 2y = 1, \qquad y(0) = 5/2$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2y$$

$$\int \frac{dy}{1-2y} = \int dx + C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \ln |2y-1| = x + C_1$$

Poniendo $y(0) = 5/2$:

$$\frac{1}{2} \ln \left(2 \cdot \frac{5}{2} - 1\right) = 0 + C_1$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2} \ln(4) = \ln(2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \ln |2y-1| = x + \ln(2)$$

$$\Rightarrow \quad |2y-1| = 4e^{2x}$$

Si $y < 1/2 \Rightarrow -2y + 1 = 4e^{2x}$

$y = \frac{1}{2} - 2e^{2x} \rightarrow$ no cumple condición inicial

Si $y > 1/2 \Rightarrow 2y - 1 = 4e^{2x}$

$\boxed{y = \frac{1}{2} + 2e^{2x}} \rightarrow$ sí la cumple

P3 Resuelve las siguientes ecuaciones homogéneas.

(a) $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$

(b) $y\dfrac{dx}{dy} = x + 4y\,e^{-2x/y}$

(c) $(x^2+xy+3y^2)\,dx - (x^2+2xy)\,dy = 0$

Solución:

(a) Repasemos la idea general:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$, $M(x,y)$, $N(x,y)$ homogéneas del mismo grado.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = F(x,y)$$

con $F(x,y)$ homogénea de grado 0.

luego:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(x\cdot 1, x\cdot\frac{y}{x}\right) = x^0 F(1, y/x)$$

Ponemos $u = y/x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(xu) = u + x\dfrac{du}{dx}$

$$\Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = F(1,u)$$

$$\frac{du}{dx} = [F(1,u) - u]\,\frac{1}{x}$$

obteniendo una ecuación de variables separables, que se resuelve como ya sabemos. Lo importante no es aprenderse la fórmula, sino el método.

Apliquémoslo a nuestro problema:

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x-y \\ N(x,y) = x \end{array}\right\}$$ homogéneas de grado 1

$$(x-y)\,dx + x\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x} = \frac{y}{x} - 1$$

Cambio variable: $u = \frac{y}{x}$, $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

$$\Rightarrow \cancel{u} + x\frac{du}{dx} = \cancel{u} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x} + c$$

$$\Rightarrow u = -\ln|x| + c_1$$

$$\Rightarrow y = -x\ln|x| + c_1 x$$

(b) $$y\frac{dx}{dy} = x + 4y e^{-2x/y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x + 4y e^{-2x/y}}{y} \rightarrow$$ homogénea de grado 0

$u = \frac{x}{y}$, $x = yu \Rightarrow \frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$

$$\Rightarrow \cancel{u} + y\frac{du}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + 4e^{-2x/y} = \cancel{u} + 4e^{-2u}$$

$$\Rightarrow \int e^{2u}\,du = \int \frac{4}{y}\,dy + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{2u} = 4\ln|y| + c_1$$

$$\Rightarrow e^{2u} = 8\ln|y| + 2c_1$$

$$\Rightarrow \quad 2u = \ln(8\ln|y| + 2c)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{y}{2}\ln(8\ln|y| + c_1)$$ (renombro $2c_1$ como c_1).

(c) $(x^2 + xy + 3y^2)\,dx - (x^2 + 2xy)\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + 3y^2}{x^2 + 2xy} = \frac{1 + y/x + 3(y/x)^2}{1 + 2\,y/x}$$

C.V: $u = y/x$, $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$

$$\Rightarrow \quad u + x\frac{du}{dx} = \frac{1 + u + 3u^2}{1 + 2u}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{1+u+3u^2}{1+2u} - u = \frac{1+u+3u^2}{1+2u} - \frac{u+2u^2}{1+2u}$$

$$= \frac{1+u^2}{1+2u}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1+2u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dx}{x} + c$$

donde $\displaystyle\int \frac{1+2u}{1+u^2}\,du = \int \frac{1}{1+u^2}\,du + \int \frac{2u}{1+u^2}\,du$

$$= \arctan(u) + \ln(1+u^2)$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(u) + \ln(1+u^2) = \ln|x| + c_1$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(y/x) + \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln|x| + c_1$$