MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2007-1
Profesora: Salomé Martínez **Auxiliares:** Nicolás Carreño, Miguel Concha, Francisco Collarte.

Pauta Control 3

21 de Junio de 2007

P1.- (a) Aplicando transformada de Laplace a la ecuación, notando que $x(0) = x'(0) = 0$

$$s^2\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x) = 1 - e^{-\pi s}$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\operatorname{sen}(t)) - \mathcal{L}(U(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi))$$

$$x(t) = \operatorname{sen}(t) - U(t-\pi)\operatorname{sen}(t-\pi)$$

Escrito de otra manera:

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & t \leq \pi \\ 2\operatorname{sen}(t) & t > \pi \end{cases}$$

(b) Como $y(0) = y'(0) = 0$

$$s^2\mathcal{L}(y) + 60s\mathcal{L}(y) + 1000\mathcal{L}(y) = 10\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{n\pi}{10}s}$$

$$\mathcal{L}(y) = 10\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-\frac{n\pi}{10}s}}{s^2+60s+1000}$$

$$\mathcal{L}(y) = 10\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-\frac{n\pi}{10}s}}{(s+30)^2+100}$$

$$\mathcal{L}(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathcal{L}[\operatorname{sen}(10t)](s+30)e^{-\frac{n\pi}{10}s}$$

$$\mathcal{L}(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathcal{L}[e^{-30t}\operatorname{sen}(10t)]e^{-\frac{n\pi}{10}s}$$

$$\mathcal{L}(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathcal{L}[U(t-\frac{n\pi}{10})e^{-30(t-\frac{n\pi}{10})}\operatorname{sen}(10(t-\frac{n\pi}{10}))]$$

Finalmente

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n U(t-\frac{n\pi}{10})\underbrace{e^{-30(t-\frac{n\pi}{10})}}_{e^{-30t}e^{3n\pi}}\underbrace{\operatorname{sen}(10t-n\pi)}_{(-1)^n\operatorname{sen}(10t)}$$

$$y(t) = e^{-30t}\operatorname{sen}(10t)\sum_{n=0}^{\infty}U(t-\frac{n\pi}{10})e^{3n\pi}$$

Ahora, tomemos un $t \in (\frac{N\pi}{10}, \frac{(N+1)\pi}{10}]$, con N fijo:

$$y(t) = e^{-30t}\operatorname{sen}(10t)\underbrace{\sum_{n=0}^{N}e^{3n\pi}}_{\frac{1-e^{3(N+1)\pi}}{1-e^{3\pi}}}$$

De esta forma, la solución y viene dada por

$$y(t) = e^{-30t}\,\mathrm{sen}(10t)\frac{1-e^{3(N+1)\pi}}{1-e^{3\pi}}, \qquad \frac{N\pi}{10} < t \leq \frac{(N+1)\pi}{10}$$

P2.- (a) Se puede ver facilmente que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, ambos de multiplicidad 2. Buscamos los vectores propios:

$\underline{\lambda_1 = 1}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, encontramos sólo el vector propio

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos entonces un vector propio generalizado

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde podemos obtener

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al igual que antes, buscamos un vector propio generalizado

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, la solución general del sistema viene dada por

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_4 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t}$$

(b) Basta evaluar en $t = 0$ para encontrar las constantes

$$x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De donde se encuentra fácilmente que

$$c_1 = 1, c_2 = 5, c_3 = 0, c_4 = 3$$

La solución entonces al problema de valor inicial es

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 5 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^t + 3 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t}$$

(c) Para encontrar la matriz e^{At}, basta multiplicar por la derecha de la matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema por $\Phi(0)^{-1}$. Notemos que

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} & te^{2t} - e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se encuentra fácilmente que

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y con esto

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} & te^{2t} - e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Para resolver el problema no homogéneo usamos la fórmula de variación de parámetros

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As} b(s) ds$$

donde

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y

$$e^{-As}b(s) = \begin{bmatrix} e^{-s} & -se^{-s} & e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & e^{-s} & e^{-2s} & -se^{-2s} - e^{-2s} \\ 0 & 0 & e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-s} & -se^{-s} & e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & e^{-s} & e^{-2s} & -se^{-2s} - e^{-2s} \\ 0 & 0 & e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-s} - se^{-s} - se^{-2s} \\ e^{-s} - se^{-2s} - e^{-2s} \\ -se^{-2s} \\ e^{-2s} \end{pmatrix}$$

Así, hay que integrar cada término de este último vector entre 0 y t para encontrar la solución.

P3.- **(a)** ($\Rightarrow$) Definamos $\psi(t) = e^{(A+B)t} - e^{At}e^{Bt}$. Queremos ver que $\psi(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
Notemos que $\psi'(t) = (A+B)e^{(A+B)t} - Ae^{At}e^{Bt} - e^{At}Be^{Bt}$.
Como $AB = BA$, se tiene que $e^{At}B = Be^{At}$, y así

$$\psi'(t) = (A+B)e^{(A+B)t} - Ae^{At}e^{Bt} - Be^{At}e^{Bt}$$

$$\psi'(t) = (A+B)(e^{(A+B)t} - e^{At}e^{Bt})$$

$$\psi'(t) = (A+B)\psi(t)$$

Además

$$\psi(0) = I - II = 0$$

Es decir, ψ resuelve un sistema lineal del cual la función nula es solución. Por el teorema de existencia y unicidad, se concluye que

$$\psi(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

($\Leftarrow$) Tenemos que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}, \forall t \in \mathbb{R}$. Derivando esta expresión

$$(A+B)e^{(A+B)t} = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt}$$

Derivando nuevamente

$$(A+B)(A+B)e^{(A+B)t} = A^2e^{At}e^{Bt} + Ae^{At}Be^{Bt} + Ae^{At}Be^{Bt} + e^{At}B^2e^{Bt}$$

Evaluando en $t = 0$

$$(A+B)(A+B) = A^2 + AB + AB + B^2$$

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2$$

$$BA = AB$$

(b) Buscamos los valores propios de la matriz de primer sistema.

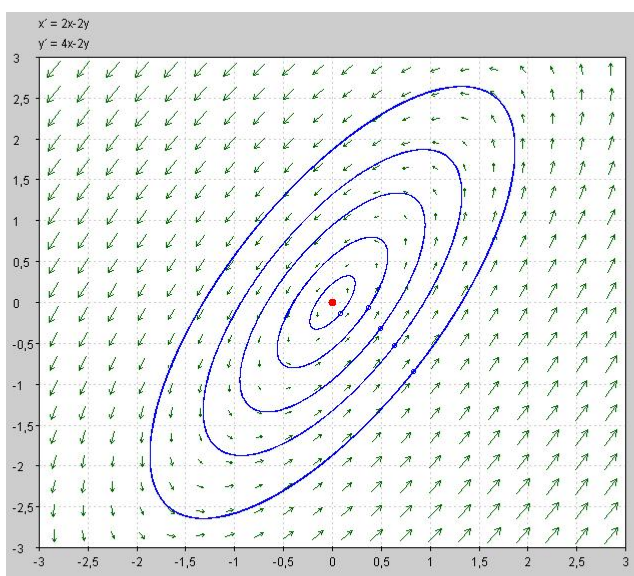
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$$

De acá deducimos que las trayectorias son cerradas, pues la parte real de los valores propios es cero.
Si calculamos los vectores propios podemos encontrar

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El diagrama de fase se muestra en la siguiente figura



Ahora el segundo sistema.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

Como los valores propios son reales distintos de igual signo, podemos deducir que se trata de un nodo asintóticamente estable.

Los vectores propios son

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El diagrama de fase es el siguiente