Guía 1 MA 26A, 2007/1

Prof. Salomé Martínez

Aux. Nicolás Carreño, Francisco Collarte, Miguel Concha

(1) Considere el siguiente sistema

$$x' = y, \; y' = -x + x^2.$$

Determine sus puntos críticos y clasifíquelos según su estabilidad. Bosqueje su diagrama de fase. ¿Qué ecuación representa este sistema?

(2) Considere el sistema

$$x' = y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$y' = -x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Analice el comportamiento de esta sistema considerando el cambio de coordenadas $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

(3) Bosqueje los diagramas de fase asociados a las ecuaciones de segundo orden:

$$x'' + 4x - 5x^3 + x^5 = 0.$$

$$x'' + 4x - x^2 = 0.$$

(4) Considere el sistema autónomo de primer orden:

$$\begin{aligned} x' &= -x + \sin y, \\ y' &= 2x. \end{aligned}$$

Determine los puntos críticos del sistema y clasifíquelos según su estabilidad.

(5) La ecuación de Van der Pol está dada por:

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0,$$

donde $\mu > 0$. Analice el comportamiento del sistema en torno al equilibrio $(x, x') = (0, 0)$ en términos del parámetro μ.

(6) Estudie los puntos críticos y bosqueje el diagrama de fase, en el cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$, del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - xy + \mu x(5 - x), \\ y' &= -5y + xy, \end{aligned}$$

para $\mu = 0, -1, 1$.

(7) Considere el sistema de competencia

$$x' = 60x - 4x^2 - 3xy,$$
$$y' = 42y - 2y^2 - 3xy.$$

Demuestre que si $x(0) \geq 0$, $y(0) \geq 0$ entonces para todo t donde la solución $(x(t), y(t))$ esté definida se tiene que $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$. Entregue condiciones en términos de la condición inicial $(x(0), y(0))$ para que $x(t)y(t) > 0$ para todo $t \neq 0$ donde la solución esté definida. Bosqueje el diagrama de fase del sistema en el cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$.