MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2007-1
Profesora: Salomé Martínez **Auxiliares:** Nicolás Carreño, Miguel Concha, Francisco Collarte.

Pauta Control 2

17 de Mayo de 2007

P1.- (a) Polinomio característico: $\lambda^4 - \lambda^3 = 0$.
La solución homogénea es: $y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x$.
Para la solución particular, ocupamos el anulador de $x + e^x$: $D^2(D-1)$. Notemos que al aplicar a la ecuación el anulador, la multiplicidad de las raices del polinomio característico aumenta (resonancia), por lo que la solución particular es de la forma:

$$y_p = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x e^x$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ por determinar. Reemplazando y_p en la ecuación, se obtiene:

$$24\alpha_2 - 6\alpha_1 - 24\alpha_2 x + \alpha_3 e^x = x + e^x$$

de donde

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{1}{6}\\ \alpha_2 &= -\frac{1}{24}\\ \alpha_3 &= 1\end{aligned}$$

La solución general es:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + xe^x.$$

Aplicando las condiciones iniciales a la solución general encontramos las siguientes ecuaciones de donde podemos encontrar las constantes que faltan:

$$\begin{array}{ccccc} y(0) & = & c_1 + c_4 & = & 0\\ y'(0) & = & c_2 + c_4 + 1 & = & 0\\ y''(0) & = & 2c_3 + c_4 + 2 & = & 0\\ y'''(0) & = & c_4 + 2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}c_1 &= 2\\ c_2 &= 1\\ c_3 &= 0\\ c_4 &= -2\end{aligned}$$

Finalmente, la solución de la ecuación es:

$$y = 2 + x - 2e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + xe^x$$

(b) Polinomio característico: $(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$.
Solución homogénea: $y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}$.
El Wronskiano: $W(e^{-x}, e^{-2x}) = -e^{-3x}$.
Buscamos la solución particular usando variación de parámetros:

$$y_p = e^{-x}\int \underbrace{\frac{e^{-2t}}{e^{-3t}}\frac{1}{1+e^t}}_{\frac{e^t}{1+e^t}}\,dt - e^{-2x}\int \underbrace{\frac{e^{-t}}{e^{-3t}}\frac{1}{1+e^t}}_{\frac{e^{2t}}{1+e^t}}\,dt.$$

donde la segunda integral se puede resolver con el cambio de variables: $u = e^t, du = e^t dt$, con lo que la solución particular de la ecuación es:

$$y_p = e^{-x}\ln(1+e^x) - e^{-2x}(e^x - \ln(1+e^x))$$

y la solución general:

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + e^{-x}(\ln(1+e^x) - 1) + e^{-2x}\ln(1+e^x)$$

(c) Polinomio característico: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_h = A\cos t + B\operatorname{sen} t$.
Wronskiano: $W(\cos t, \operatorname{sen} t) = 1$.
Ocupando la fórmula de variación de parámetros, se tiene que la solución general de la ecuación es:

$$x(t) = A\cos(t) + B\operatorname{sen}(t) - \cos(t)\int_0^t \operatorname{sen}(s)f(s)ds + \operatorname{sen}(t)\int_0^t \cos(s)f(s)ds$$

$$x(t) = A\cos(t) + B\operatorname{sen}(t) + \int_0^t \underbrace{\operatorname{sen}(t)\cos(s)f(s) - \cos(t)\operatorname{sen}(s)f(s)}_{\operatorname{sen}(t-s)}ds$$

$$x(t) = A\cos(t) + B\operatorname{sen}(t) + \int_0^t \operatorname{sen}(t-s)f(s)ds$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$x(0) = A = x_0$$

$$x'(t) = -x_0\operatorname{sen}(t) + B\cos(t) + \underbrace{\operatorname{sen}(t-t)}_{0}f(t)$$

$$x'(0) = B = v_0$$

Finalmente:

$$x(t) = x_0\cos(t) + v_0\operatorname{sen}(t) + \int_0^t \operatorname{sen}(t-s)f(s)ds$$

P2.- (a) Polinomio característico: $r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{-\lambda}, r_2 = \sqrt{-\lambda}$. Verificar que dada las condiciones $y'(0) = 0, y(1) = 0$, sólo sirve el caso $\lambda > 0$ (en los casos $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$ y debe ser nula). Así, se tiene que

$$y(t) = A\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}t) + B\cos(\sqrt{\lambda}t)$$

$$y'(t) = A\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}t) - B\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}t)$$

$$y'(0) = A\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$y(1) = B\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$$

Si $B = 0$, y sería idénticamente nula, por lo que $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$, de donde se tiene que

$$\sqrt{\lambda} = \frac{(2n+1)}{2}\pi, n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda = \frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2$$

Con esto, los pares propios son

$$(\lambda_n, y_n) = \left(\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2, \cos\left(\frac{(2n+1)}{2}\pi t\right)\right), n \in \mathbb{N}$$

(b) La solución de esta ecuación es de la forma:

$$y(t) = Ay_1(t) + By_2(t) + \int_0^t H(s,t)f(s)ds$$

donde y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación homogénea, $A, B \in \mathbb{R}$ y $H(s,t)$ es la función entregada por variación de parámetros (la fórmula vista en clases). Se puede suponer sin pérdida de generalidad que

$$y_1(0) = 1 \qquad y_2(0) = 0$$

$$y_1'(0) = 0 \qquad y_2'(0) = 1$$

Imponiendo las condiciones de borde:

En $t = 0$:

$$y'(0) = 0 \Rightarrow Ay_1'(0) + By_2'(0) = 0$$

Esto pues la derivada de la integral vale cero en $t = 0$. Se concluye que $B = 0$.

En $t = 1$:

$$y(1) = 0 \Rightarrow Ay_1(1) + \int_0^1 H(s,1)f(s)ds = 0$$

Hay dos casos:

Caso 1: $y_1(1) \neq 0$: En este caso se puede despejar A, con lo cual

$$A = -\frac{\int_0^1 H(s,1)f(s)ds}{y_1(1)}$$

y se tiene la unicidad.

Caso 2: $y_1(1) = 0$: En este caso, si y_1 es solución de la ecuación homogénea, se tendrían infinitas soluciones. Luego, para imponer unicidad:

$$\lambda \neq \frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De no tenerse esta condición, entonces la función f debe satisfacer la ecuación integral:

$$\int_0^1 H(s,1)f(s)ds = 0.$$

P3.- (a) Aplicamos transformada de Laplace a la ecuación:

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y') + \frac{d}{ds}\mathcal{L}(y') + n\mathcal{L}(y) = 0$$

Denotando $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$

$$-\frac{d}{ds}[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + sY - 1 + T + sY' + nY = 0$$

$$-2sY - s^2Y' + 1 + sY - 1 + Y + sY' + nY = 0$$

$$(s - s^2)Y' + (n + 1 - s)Y = 0$$

(b) Tenemos una ecuación homogénea de primer orden:

$$Y' + \frac{n+1-s}{s-s^2}Y = 0$$

$$\Rightarrow Y = C\exp\left(\int \frac{n+1-s}{s^2-s}\right)ds$$

pero

$$\begin{aligned} \int \frac{n+1-s}{s^2-s}ds &= -\int \frac{n+1}{s}ds + \int \frac{n}{s-1}ds \\ &= -(n+1)\ln(s) + n\ln(s-1) \\ &= \ln\left(\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

de donde

$$Y(s) = C\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

(c) Llamemos $f(t) = t^n e^{-t}$. Es fácil ver que

$$f^{(i)}(0) = 0 \qquad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$$

Así, aplicando la fórmula de la transformada de la derivada n-ésima de una función, se tiene:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right](s) = s^n\mathcal{L}(t^n e^{-t}) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right](s) = s^n\mathcal{L}(t^n e^{-t})(s) \quad \left(= s^n\frac{n!}{(s+1)^{n+1}}\right)$$

(d)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right](s) &= \frac{1}{n!}\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right](s-1) \\
&= \frac{(s-1)^n}{n!}\mathcal{L}(t^n e^{-t})(s-1) \\
&= \frac{(s-1)^n}{n!}\frac{n!}{s^{n+1}} \\
&= \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}
\end{aligned}$$

(e) De la parte (b) tenemos que

$$Y(s) = \mathcal{L}(y)(s) = C\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

$$y(t) = C\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right]$$

y por la parte (d)

$$y(t) = C\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$$

(f) **(i)** $n = 1$

$$y(t) = Ce^t\frac{d}{dt}(te^{-t}) = Ce^t[e^{-t} - te^{-t}]$$

$$y(0) = C = 1$$

(ii) $n = 2$

$$y(t) = C\frac{e^t}{2!}\frac{d^2}{dt^2}(t^2 e^{-t}) = C\frac{e^t}{2}(2e^{-t} - 4te^{-t} + t^2 e^{-t})$$

$$y(0) = C = 1$$

(iii) $n = 3$

$$y(t) = C\frac{e^t}{3!}\frac{d^3}{dt^3}(t^3 e^{-t}) = C\frac{e^t}{6}(6e^{-t} - 18te^{-t} + 9t^2 e^{-t} - t^3 e{-}t)$$

$$y(0) = C = 1$$

(g) Tenemos ahora $y(t) = C\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$
Sabemos que

$$\frac{t^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i}{dt^i}t^n\frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}e^{-t}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\frac{d^i}{dt^i}t^n &= \frac{n!}{(n-i)!}t^{n-i} \\
\frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}}e^{-t} &= (-1)^{n-i}e^{-t}
\end{aligned}$$

Así, al evaluar en 0, el único término de la sumatoria que es distinto de cero es el n-ésimo, con lo que queda

$$y(0) = C\frac{1}{n!}n! = C = 1$$