

Guía 1 MA 26A, 2007/1

Prof. Salomé Martínez

Aux. Nicolás Carreño, Francisco Collarte, Miguel Concha

- (1) Resuelva $y'' + 9y = \sin^4(x)$ mediante el método de los coeficientes indeterminados (exprese apropiadamente $\sin^4(x)$ usando identidades trigonométricas).
- (2) Resuelva mediante el método de coeficientes indeterminados los problemas:
 - (a) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$.
 - (b) $y'' - 5y' = x - 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
 - (c) $y^{(4)} - y''' = x + e^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.
- (3) Resuelva usando el método de variación de parámetros los siguientes problemas
 - (a) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$.
 - (b) $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 - (c) $y''' + y' = \tan x$.
- (4) Use variación de parámetros para probar que la solución del problema de valor inicial

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$

está dada por

$$x(t) = \int_0^t \sin(t-s)f(s)ds + x_0 \cos t + v_0 \sin t.$$

- (5) Use la sustitución $x = e^t$ para resolver las ecuaciones

$$x^2 y'' + 9xy' - 20y = 0.$$

$$x^2 y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x.$$

- (6) Sean $a_1, a_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Considere $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $u \not\equiv 0$ una solución de la ecuación

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad \text{en } [a, b].$$

Demuestre que u tiene a lo más un número finito de ceros.

- (7) Sean $a_1, a_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Considere el problema

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad \text{en } [a, b], \quad y'(a) = y'(b) = 0,$$

donde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Determine condiciones para que el problema tenga al menos una solución para cada $f \in C([a, b])$. ¿Cuándo este problema tiene más de una solución? Determine en que casos el problema no tiene solución.

- (8) Determine las soluciones (si existen) del problema

$$u'' + \alpha u = \cos \beta u, \quad u'(0) = u'(1) = 0,$$

en términos de los parámetros α y β .

- (9) Considere el siguiente problema de valores propios

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

- (a) Pruebe que $\lambda < 0$ y $\lambda = 0$ no son valores propios. Determine los valores propios.
 (b) Pruebe que los valores propios son una secuencia $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ con $\lambda_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$.
 (c) Para cada n encuentre una función propia asociada $\phi_n(x)$. Grafique estas funciones y estudie sus ceros.

- (10) Considere la ecuación

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

con $a_1, a_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y periódicas de período T . Suponga que $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la ecuación y satisface:

$$y(0) = y(T), \quad y'(0) = y'(T).$$

Demuestre que y es periódica.

- (11) Considere el problema de condiciones de borde

$$y'' + p(x)y = g(x), \quad y(a) = y(b) = 0,$$

donde $g, p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas. Demuestre que si $p(x) \leq 0$ en $[a, b]$ entonces este problema tiene siempre solución y esta es única.

- (12) (a) Considere el problema de condiciones iniciales de cuarto orden

$$y^{(4)} + p(x)y = g(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0.$$

Donde $p, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas. Suponga que para $g = 0$ este problema sólo tiene la solución $y \equiv 0$. Demuestre que existe solución para cualquier g .

- (b) Considere el problema

$$y^{(4)} - \alpha^4 y = g(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0.$$

Muestre que si $\alpha \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces este problema tiene solución única para toda $g \in C([0, 1])$.

- (13) Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función admisible (como definimos en clases). Demuestre que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0.$$

¿Existe una función $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ admisible tal que

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^{1/4}}?$$

- (14) Resuelva usando transformada de Laplace:
 (a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin 3t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
 (b) $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
 (c) $y'' + 8y' + 20y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \pi$.
 (15) Usando transformada de Laplace encuentre una solución no nula de la ecuación

$$ty'' + (t - 1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0.$$

Hint: Recuerde que $\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))(s)$ donde $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$.

- (16) Resuelva usando transformada de Laplace las ecuaciones

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau.$$

$$y(t) = \cos t + \int_0^t e^{-\tau} y(t - \tau) d\tau.$$

- (17) Determine $\mathcal{L}^{-1}(\tan^{-1}(\frac{3}{s+2}))$.
 (18) Determine usando la fórmula de la convolución $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s^2+k^2)^2})$.
 (19) Resuelva usando transformada de Laplace

$$ty'' - 2y' + ty = 0, \quad y(0) = 0.$$

$$x'' + 2x' + x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$