Guía 1 MA 26A, 2007/1

Prof. Salomé Martínez
Aux. Nicolás Carreño, Francisco Collarte, Miguel Concha

(1) Resuelva $y'' + 9y = \sin^4(x)$ mediante el método de los coeficientes indeterminados (exprese apropiadamente $\sin^4(x)$ usando identidades trigonométricas).

(2) Resuelva mediante el método de coeficientes indeterminados los problemas:
   (a) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$.
   (b) $y'' - 5y' = x - 2, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 2$.
   (c) $y^{(4)} - y''' = x + e^x, \;\; y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

(3) Resuelva usando el método de variación de parámetros los siguientes problemas
   (a) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$.
   (b) $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$.
   (c) $y''' + y' = \tan x$.

(4) Sean $a_1, a_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Considere $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, $u \not\equiv 0$ una solución de la equación

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \;\; \text{en } [a, b].$$

Demuestre que u tiene a lo más un número finito de ceros.

(5) Sean $a_1, a_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Considere el problema

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \;\; \text{en } [a, b], \; y'(a) = y'(b) = 0,$$

donde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua. Determine condiciones para que el problema tenga al menos una solución para cada $f \in C([a, b])$. ¿Cuándo este problema tiene más de una solución? Determine en que casos el problema no tiene solución.

(6) Determine las soluciones (si existen) del problema

$$u'' + \alpha u = \cos \beta u, \; u'(0) = u'(1) = 0,$$

en términos de los parámetros α y β.

(7) Considere el siguiente problema de valores propios

$$y'' + \lambda y = 0, \; y'(0) = 0, \; y(1) + y'(1) = 0.$$

   (a) Pruebe que $\lambda < 0$ y $\lambda = 0$ no son valores propios. Determine los valores propios.
   (b) Pruebe que los valores propios son una secuencia $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ con $\lambda_n \to \infty$ as $n \to \infty$.

(c) Para cada n encuentre una función propia asociada $\phi_n(x)$. Grafique estas funciones y estudie sus ceros.

(8) Considere la ecuación

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

con $a_1, a_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas y periódicas de período T. Suponga que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación y satisface:

$$y(0) = y(T), \ y'(0) = y'(T).$$

Demuestre que y es periódica.

(9) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función admisible (como definimos en clases). Demuestre que

$$\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0.$$

¿Existe una función $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ admisible tal que

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{(s^2+1)^{1/4}}?$$

(10) Resuelva usando transformada de Laplace:

(a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin 3t, \ \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 1.$

(b) $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, \ y(0) = y'(0) = 0.$

(c) $y'' + 8y' + 20y = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = \pi.$