

**CONTROL 3 MA 26A, 2004/1**

**Prof. Salomé Martínez**

**Prof. Aux. Cristián Bravo**

**Tiempo: 3 hrs.**

- (1) (a) Resuelva, usando el método de Transformada de Laplace el problema de valores iniciales

$$y'' + 4y' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \pi, \\ 1 & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi, \\ 0 & \text{si } t > 2\pi \end{cases}$$

- (b) Use transformada de Laplace para encontrar una solución del problema

$$xy'' + 2(x-1)y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(Recuerde que  $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}(f(t))$ ).

- (c) La función de Bessel de orden 0 es solución de la ecuación diferencial:

$$x^2 y'' + xy' - x^2 y'' = 0, \quad y(0) = 1$$

Demuestre que  $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$  satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$(s^2 + 1)Y'(s) + sY(s) = 0.$$

Encuentre una expresión para  $Y(s)$ .

- (2) Resuelva el sistema  $x'(t) = Ax(t) + b(t)$  con  $x(0) = x_0$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(2t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (3) Considere el sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  con  $A : \mathbb{R} \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$  continua no trivial y de período  $T$ , es decir,  $A(t+T) = A(t)$  para todo  $t$ . Suponga además que  $A(t)$  es impar es decir  $A(-t) = -A(t)$ . Sea  $W(t)$  la matriz fundamental del sistema que satisface  $W(0) = I$ . Pruebe que:

(a)  $W(t+T) = W(t)W(T)$  para todo  $t$ .

(b)  $W(-t) = W(t)$  para todo  $t$ .

(c)  $W(T)^2 = I$ .

(d) Todas las soluciones  $x(t)$  del sistema son periódicas de período  $2T$ .