

CONTROL 2 MA 26A, 2004/1

Prof. Salomé Martínez

Tiempo: 3 hrs.

- (1) (a) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^{2x} + 2e^x \cos x .$$

- (b) Encuentre la solución del problema de condiciones iniciales

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 50 \frac{\ln x}{x^3}, \quad x > 0,$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 5.$$

- (2) (a) Encuentre la solución general en \mathbb{R} de la ecuación

$$y'' + 2 \tanh(x) y' + y = 0.$$

Indicación: Sea $L(y) = y' + \tanh(x) y$. Calcule $L(L(y))$.

- (b) Considere el problema de condiciones de borde

$$y'' + p(x)y = g(x) \quad x \in [a, b] ,$$

$$y(a) = y(b) = 0 ,$$

donde p, g son funciones continuas en $[a, b]$. Demuestre que si $p(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces este problema posee solución y esta solución es única.

Indicación: Cuando $g \equiv 0$, multiplique la ecuación por y y realice una integración por partes.

- (3) (a) Considere el problema de condiciones de borde de cuarto orden

$$y'''' + p(x)y = g(x), \quad x \in [0, 1] , \tag{1}$$

$$y(0) = y''(0) = 0 = y''(1) = y(1) \tag{2}$$

donde p y g son funciones continuas en $[0, 1]$. Suponga que este problema para $g = 0$ tiene solo la solución $y = 0$. Demuestre entonces que existe solución de (1)-(2) para cualquier función g .

- (b) Considere el problema

$$y'''' - \alpha^4 y = g(x), \quad x \in [0, 1] ,$$

$$y(0) = y''(0) = 0 = y''(1) = y(1).$$

Muestre que si $\alpha \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces este problema tiene solución única para cualquier función $g(x)$ continua en $[0, 1]$.