1. Ecuaciones Exactas

Consideremos la ecuación diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \tag{1.1}$$

en donde la variable independiente es x y la variable dependiente es y. Vamos a asociar a esta ecuación diferencial la expresión

$$M(x,y)h + N(x,y)k \tag{1.2}$$

que depende de x, y, h, k con $(x,y) \in \Omega(\text{abierto}) \subset \mathbb{R}^2, (h,k) \in \mathbb{R}^2$.
Diremos que (1.2) es *exacta* si existe una función $E : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) &= M(x,y)\\ \frac{\partial E}{\partial y}(x,y) &= N(x,y)\end{aligned}$$

Entonces si (1.2) es exacta se tiene que,

$$M(x,y)h + N(x,y)k = \frac{\partial E}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)k = E'(x,y)(h,k) \tag{1.3}$$

donde $E'(x,y)$ es la derivada de E en (x,y). Recuerde que $E'(x,y)$ es una función lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que asigna a $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ la expresión,

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)k = \Big(\frac{\partial E}{\partial x}(x,y), \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)\Big)\binom{h}{k} = \text{grad } E(x,y)\cdot(h,k)$$

Supongamos que en vez de (1.1) hubiéramos comenzado con la ecuación,

$$M(x,y)x' + N(x,y) = 0 \tag{1.4}$$

es decir queremos soluciones de la forma $x = x(y)$. Nuevamente se considera la misma expresión (1.2) y se dirá que es exacta si existe E tal que,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) &= M(x,y) \\
\frac{\partial E}{\partial y}(x,y) &= N(x,y)
\end{aligned}
$$

Se dirá finalmente que (1.1) y/o (1.4) son exactas.

En la expresión

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)k$$

es costumbre escribir $h = dx$, $k = dy$, luego se tiene

$$E'(x,y)(dx,dy) = \frac{\partial E}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)dy$$

Por otro lado, para encontrar soluciones de la ecuación

$$
\begin{aligned}
M(x,y) + N(x,y)y' &= 0 \quad \text{(o bien)} \\
M(x,y)x' + N(x,y) &= 0
\end{aligned}
$$

esta se escribe de la siguiente forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.5}$$

y se dice que la ecuación (1.5) es exacta si,

$$
\begin{aligned}
M(x,y) &= \frac{\partial E}{\partial x}(x,y) \\
N(x,y) &= \frac{\partial E}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}
$$

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$$

Reconocemos

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x^2y^3 \\ N(x,y) &= x^3y^2 \end{aligned}$$

y se tiene que si $E = \frac{x^3y^3}{3}$, entonces

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) = x^2y^3; \quad \frac{\partial E}{\partial y}(x,y) = x^3y^2$$

asi que la ecuación es exacta.

Cómo reconocer que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es exacta?.

Para ello se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Supongamos que $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son de clase C^1 en Ω. Entonces una condición necesaria y suficiente para que*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

sea exacta, es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

1.1. Método para resolver (1.5). Se tiene

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

con $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, por lo menos.

1) Revisamos si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{en } \Omega$$

2) Si 1) es cierto, entonces $\exists E : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \tag{1.7}$$

de (1.6), para y fijo, integramos sobre x, lo cual nos da

$$E(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y) \tag{1.8}$$

derivando respecto de y,

$$N(x,y)=\frac{\partial E}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx+g'(y)$$

con lo que

$$g'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

de donde se encuentra $g(y)$ que se reemplaza en (1.8).

Nota 1.1. *Se debe tener que*

$$N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

es independiente de x. Esto es cierto ya que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M(x,y)dx &= \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\\
&= \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\\
&= 0
\end{aligned}$$

por su exactitud.

3) Las soluciones se obtienen despejando, si es posible, de

$$E(x,y)=c$$

ya sea y como función de x o x como función de y.

Antes de continuar, observemos que podríamos haber comenzado a partir de la ecuación (1.7), esto es, integrar primero $\frac{\partial E}{\partial y}=N(x,y)$ respecto de y con x fijo. Se obtiene

$$E(x,y)=\int N(x,y)dx+h(x)$$

y

$$\begin{aligned}
h'(x) &= -\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dx+\frac{\partial E}{\partial x}(x,y)\\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dx+M(x,y)
\end{aligned}$$

Ejemplo

1) Resuelva

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$$

Se tiene, utilizando las definiciones del procedimiento que

$M(x,y) = 2xy$, $N(x,y) = x^2 - 1$, $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$

Entonces, la ecuación es exacta.
Por lo tanto existe una función $E : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\text{i)}\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) = M(x,y) = 2xy$$
$$\text{ii)}\frac{\partial E}{\partial y}(x,y) = N(x,y) = x^2 - 1$$

De i) obtenemos que

$E(x,y) = x^2y + g(y)$

y aplicando ii)

$$\frac{\partial E}{\partial y}(x,y) = x^2 - 1 = x^2 + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = -1$$

$$\Rightarrow g(y) = -y \text{ más una constante que no se considera}$$

Entonces

$$E(x,y) = x^2y - y = (x^2 - 1)y$$

Por lo tanto las soluciones están dadas por

$$y(x^2 - 1) = c$$

La solución se puede escribir también como

$$y = \frac{c}{x^2 - 1} \text{ si } |x| \neq 1$$

o también

$$x = \pm\sqrt{\frac{c+y}{y}}$$

Ejemplo 2)

$$(\cos x \sin x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$$

En este caso se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Igual que en el ejemplo anterior, la ecuación es exacta y por lo tanto existe alguna función real $E(x, y)$ tal que

$$\text{i)}\frac{\partial E}{\partial x} = M(x, y) = \cos x \sin x - xy^2$$

$$\text{ii)}\frac{\partial E}{\partial y} = y(1 - x^2)$$

Integrando la expresión ii), sin considerar la constante de integración, respecto a y, se obtiene

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + h(x)$$

Luego, derivando con respecto a x y utilizando i) se obtiene que

$$-yx^2 + h'(x) = \cos x \sin x - xy^2$$

con lo cual $h'(x) = \cos x \sin x$ y, entonces, elegimos $h(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$.

En consecuencia, las soluciones del problema vienen dadas por

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + \frac{\sin^2 x}{2} = c$$

Volviendo al caso general.

Supongamos que $Mdx + Ndy = 0$ es exacta y que se ha encontrado la función solución de forma (1.1), supongamos también que podemos despejar

$$y = f(x)$$

con $x \in I \subseteq \mathbb{R}$.Esto es, y satisface

$$E(x, f(x)) = c \ \forall x \in I$$

Si derivamos esta expresión respecto de x, se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial E}{\partial y}(x, f(x))f'(x) = 0$$

Es decir

$$M(x, f(x)) + N(x, f(x))f'(x) = 0$$

y, usando la notación $y = f(x)$, $y' = f'(x)$ se tiene

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

En consecuencia, cada función $y = f(x)$ con f diferenciablemente continua (clase $\mathbb{C}^1$) que satisface $E(x, y) = c$ da origen a soluciones de (1.1).

De manera análoga, si podemos despejar $x = g(y)$ con g de clase $\mathbb{C}^1$ en un intervalo $I \in \mathbb{R}$ entonces g satisface

$$M(g(y), y)g'(y) + N(g(y), y) = 0$$

y usando la notación $x = g(y)$, $x' = g'(y)$, obtenemos que

$$M(x, y)x' + N(x, y) = 0$$

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$2y(y - 1)dx + x(2y - 1)dy = 0$$

donde se tiene que

$$M(x, y) = 2y(y - 1) = 2y^2 - 2y$$
$$N(x, y) = x(2y - 1)$$

Observemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y - 1 \neq 0$$

es decir, la ecuación no es exacta. Notemos, sin embargo, que si multiplicamos la ecuación por x, entonces se tiene

$$2xy(y-1)dx + x^2(2y-1)dy = 0$$

La nueva ecuación (1.1) tiene

$$M(x,y) = 2xy(y-1) = 2xy^2 - 2xy$$

$$N(x,y) = x^2(2y-1) = 2x^2y - x^2$$

$$y \qquad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy - 2x - (4xy - 2x) = 0$$

Por lo tanto la nueva ecuación es exacta. Es claro que las 2 ecuaciones, la exacta y la no exacta son equivalentes ya que el factor se anula en $x = 0$.

Ejercicio) Resolver la ecuación (1.1):

Más generalmente supongamos que se tiene:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\text{y tal que} \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \neq 0 \quad \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Decimos entonces que la ecuación es NO EXACTA. Como en el ejemplo anterior multiplicamos la ecuación por una función $\mu(x,y)$ para obtener:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

con M Y N redefinidos como:

$$M(x,y) = \mu(x,y)M(x,y)$$
$$N(x,y) = \mu(x,y)N(x,y)$$

Si esta nueva ecuación es exacta, decimos que μ es un factor integrante en la ecuación.
Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que μ es por lo menos de clase $\mathbb{C}^1 : \Omega \rightarrow \Re$, de esta forma sabemos que:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

será exacta ssi:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

esto es:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

o

$$\mu(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

Así que (1.1) es exacta ssi podemos encontrar una solución μ de la ecuación (1.1), que es una ecuación en derivadas parciales.
Por supuesto no se trata de encontrar todas las soluciones de (1.1), nos basta solo una. Notemos que el problema de encontrar todas las soluciones de (1.1), esto es resolver dicha ecuación, es un problema más difícil que el original.
Se verán solo algunos casos particulares para encontrar μ.

- Escribimos primero (1.1) como:

$$\frac{\mu(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})}{N} = \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{M}{N}\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

(asi que necesitamos $N \neq 0$). Suponemos entonces que: $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ es una función sólo de x.
Intentamos en este caso μ sólo función de x, esto es:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$$

y reemplazo en (1.1)

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = Q(x)$$

o

$$\mu' = Q(x)\mu(x)$$

que es una ecuación lineal de primer orden:

$$\mu' - Q(x)\mu(x) = 0 \qquad /e^{-\int Q dx}$$

$$\Downarrow$$

$$(\mu e^{-\int Q dx})' = 0. \quad \Rightarrow$$

$\mu(x) = ce^{\int Q dx}$ y tomando $c = 1$

$$\mu(x) = e^{\int Q dx}$$

Como segundo caso suponemos que:

$$\mu \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = S(y)$$

es decir, que es sólo función de y. Escribimos (1.1) como:

$$\frac{\mu(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})}{M} = \frac{N}{M}\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

y vemos que si en este caso suponemos que $\mu = \mu(y) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, se obtendrá:

$$\frac{\mu(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})}{M} = -\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\mu'(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = -S(y)$$

y se integra como antes. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

Resuelva

$$(x + y)dx + x(\log x)dy = 0$$
$$0 < x < y$$

$$M(x, y) = x + y \qquad N(x, y) = x \log x$$

Así que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \log x + 1$$

por lo tanto, la ecuación no es exacta. Formamos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1 - (\log x + 1)}{x \log x}$$

$$= \frac{-\log x}{x \log x} = -\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \mu'(x) = -\frac{1}{x}\mu(x)$$
$$\Downarrow$$

$\mu'(x) + \frac{1}{x}\mu(x) = 0$ ecuación lineal de primer orden

$$\Downarrow$$
$$(x\mu(x))' = 0$$

$\Rightarrow \mu(x) = \frac{c}{x} \rightarrow$ tomo $c = 1$, $\mu(x) = \frac{1}{x}$

El resto es estándar. Formamos la nueva ecuación

$$(1 + \frac{y}{x})dx + (\log x)dy = 0$$
$$H = 1 + \frac{y}{x} \qquad L = \log x$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

la ecuación es ahora exacta. Así que existe E tal que

$$\frac{\partial E}{\partial x} = H, \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = L$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\partial E}{\partial x} = 1 + \frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = \log x$$
$$\downarrow dx$$
$$E(x, y) = x + y \log x + g(y)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial y} &= \log x + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \\ &= \log x \qquad g(y) = c \\ &\Rightarrow E(x,y) = x + y\log x + c\end{aligned}$$

solución: $x + y\log x = c$

Otro tipo de problemas:
Ejercicio: Considere la ecuación

$$(2x - y\sin xy + ky^4)dx - (20xy^3 + x\sin xy)dy$$

Se pide encontrar k tal que la ecuación sea exacta. (k viene de $4ky^3 = -20y^3 \rightarrow k = -5$)

Ejemplo: Encuentre una función $M(x,y)$ tal que:

$$Mdx + (\underbrace{xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}}_{N})dy = 0$$

sea exacta. Se debe tener

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}$$

por lo tanto, integrando respecto de y, se obtiene:

(x fijo)

$$M(x,y) = \frac{1}{x}e^{xy} + \int xye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2}$$

Nos falta por calcular

$$\int xye^{xy}dy$$

Poniendo $s = xy \Rightarrow \frac{1}{x}\int se^s ds$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{x}[se^s - \int e^s ds] = \frac{1}{x}[se^s - e^s] \\ &= \frac{1}{x}(xy-1)e^{xy} \\ &\Rightarrow\end{aligned}$$

$$M(x,y) = \frac{1}{x}e^{xy} + \frac{1}{x}(xy-1)e^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2}$$

Simplificando

$$\Downarrow$$

$$M(x,y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2}$$

Tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y - \frac{1}{x^2}$$