1. Introducción

Definición 1.1. *Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes se llama ecuación diferencial.*

En (1.1) y (1.2), y es la variable dependiente y t es la variable independiente, a, c son parámetros.

$$\frac{dy}{dt} = ae^t, \tag{1.1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c\frac{dy}{dt} + ay. \tag{1.2}$$

En (1.3), u es la variable dependiente, x e y son las variables independientes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.3}$$

En las ecuaciones diferenciales la(s) variable(s) dependiente(s) es(son) la(s) incógnita(s) del problema.

1.1. Clasificación de ecuaciones diferenciales.

Se mostrará a continuación la clasificación de las ecuaciones diferenciales de acuerdo a su tipo, a su orden y de acuerdo a si es lineal o no lineal.

Clasificación por tipo. Se dividen en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y en Ecuaciones Diferenciales Parciales o Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP).

(a) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, son aquellas que contienen derivadas de una o más variables dependientes con respecto a solamente una variable independiente. Las ecuaciones diferenciales ordinarias las vamos a abreviar por EDO o edo.

Ejemplos: los casos (1.1) y (1.2) y también (1.4)

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = h(t), \tag{1.4}$$

donde $h(t), a_0(t), \cdots, a_{n-1}(t)$ son funciones conocidas.

(b) Ecuaciones Diferenciales Parciales, son aquellas que contienen derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes.

Ejemplos. La ecuación (1.3) que corresponde a la ecuación de Laplace y (1.5), (1.6) que corresponden a las ecuaciones del calor y de ondas respectivamente.

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.6}$$

Clasificación por orden. El orden de una Ecuación Diferencial es el de la derivada de mayor orden que aparece en esta.

Ejemplos. La edo (1.7) es de orden 3.

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 5\frac{d^2 y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 7y = e^t, \tag{1.7}$$

Los ejemplos (1.3), (1.5) y (1.6) corresponden a EDPs de orden 2. Los ejemplos (1.1), (1.2) y (1.4) corresponden a EDOs de orden 1, 2 y n respectivamente.

Consideremos a continuación la expresión

$$F(t, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.8}$$

donde $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \longmapsto \mathbb{R}$ y Ω es un abierto. (1.8) representa la ecuación diferencial ordinaria escalar más general de orden n.

Un ejemplo de una F es, para el caso de orden tres ($n = 3$), la función (1.9), que tiene como edo asociada a (1.10)

$$F(t, x_0, x_1, x_2, x_3) = a_0 x_0^2 + a_1 x_1^3 + a_2 \log |x_2| + e^{x_3} - h(t), \tag{1.9}$$

$$e^{y^{(3)}} + a_2 \log |y''| + a_1 (y')^3 + a_0 y^2 = h(t), \tag{1.10}$$

donde se supone que a_0, a_1, a_2 son constantes y $h(t)$ es una función conocida.

En lo que sigue vamos a suponer siempre la ecuación está resuelta para la derivada de mayor orden, esto significa que de (1.8) se puede despejar la derivada de mayor orden. A la expresión (1.11) vamos a llamarla forma normal de la ecuación escalar más general de orden n.

$$y^{(n)} = \tilde{F}(t, y, \cdots, y^{(n-1)}), \tag{1.11}$$

Clasificación según linealidad. Un caso importante es aquel en que la función F viene dada por (1.12), con su ecuación diferencial correspondiente (1.13)

$$F(t, x_0, \cdots, x_n) = a_0(t)x_0 + a_1(t)x_1 + a_2(t)x_2 + \cdots + a_n(t)x_n - g(t), \tag{1.12}$$

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = g(t) \tag{1.13}$$

Si $a_n(t) \neq 0$, (1.13) se puede escribir como

$$y^{(n)} + \tilde{a}_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + \tilde{a}_0(t)y = \tilde{g}(t) \tag{1.14}$$

donde

$$\tilde{a}_i(t) = \frac{a_i(t)}{a_n(t)} \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, n-1, \quad \text{y} \quad \tilde{g}(t) = \frac{g(t)}{a_n(t)} \ .$$

La ecuación (1.13) o (1.14) se llama Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de orden n.

Una edo (de orden n) que no es lineal, esto es, que no se puede escribir en la forma (1.13) o (1.14), la llamaremos edo (de orden n) *no lineal.*

Algunos ejemplos de ecuaciones no lineales son

$$y' = ty^{1/2}, \tag{1.15}$$

$$y'' + y^2 = 0. \tag{1.16}$$

1.2. Solución de una EDO. Comencemos analizando el caso particular de la edo de segundo orden lineal

$$y'' + k^2 y = 0, \tag{1.17}$$

donde k es una constante no nula.

Resolver (1.17) es encontrar funciones $y(t)$ definidas en un cierto intervalo tales que

$$y'' = -k^2 y.$$

Con la experiencia de cursos anteriores sabemos que un par de funciones que satisfacen esta propiedad son $\cos kt$ y $\sin kt$. Ambas funciones satisfacen entonces (1.17) para todo $t \in \mathbb{R}$ y por lo tanto son soluciones de la ecuación definida en $\mathbb{R}$.

Más generalmente consideremos la ecuación (1.8) y expliquemos lo que entendemos por una solución de esta ecuación.

Definición 1.2. *Una solución de (1.8) es una función $z : I \longmapsto \mathbb{R}$, de clase $C^n(I)$, tal que*

$$F(t, z(t), z'(t), \cdots, z^{(n)}(t)) = 0, \qquad \forall\ t \in I.$$

Notemos que para cada $t \in I$ el punto $(t, z(t), \cdots, z^{(n)}(t))$ necesariamente debe pertenecer al dominio Ω de definición de F. En esta definición I denota un intervalo de los reales. Este intervalo puede no ser el máximo intervalo donde se puede definir la solución. Encontrar este intervalo maximal puede llegar a ser un problema dificil en el caso no lineal.

Definición 1.3. *El problema con condición inicial para la ecuación (1.8) consiste en encontrar la solución de esta ecuación que satisface condiciones iniciales de la forma*

$$y(t_0) = c_1,\ y'(t_0) = c_2,\ \cdots, y^{n-1}(t_0) = c_n, \tag{1.18}$$

donde $t_0 \in I$ es un punto dado y $c_1 \cdots, c_n$ son constantes dadas.

Esta solución puede no ser única y veremos ejemplos más adelante.

2. EDO de primer orden

La edo más simple de primer orden tiene la forma

$$y'(t) = g(t) \tag{2.1}$$

donde g es una función contínua. Por integración obtenemos inmediatamente que las soluciones de esta ecuación queda dada por la expresión

$$y(t) = C + \int g(t)dt,$$

donde C es una constante arbitraria.

Consideremos a continuación la edo

$$y' = \frac{g(t)}{h(y)}, \tag{2.2}$$

donde g y h son funciones continuas tales que $h(y) \neq 0$. Esta ecuación se conoce como de 'variables separables'. Suponiendo que $y = \phi(t)$ es una solución de esta edo, se tiene que

$$h(\phi(t))\phi'(t) = g(t), \tag{2.3}$$

y definiendo

$$H(s) = \int h(s)ds, \qquad G(t) = \int g(t)dt,$$

por integración se obtiene que la solución $\phi(t)$ debe satisfacer

$$H(\phi(t)) = G(t) + C.$$

Inversamente, si $z(t)$ es una función diferenciable que satisface

$$H(z(t)) = G(t) + C$$

en un intervalo I, entonces al derivar,

$$h(z(t))z'(t) = g(t),$$

se tiene que z es solución de (2.2) en cualquier intervalo donde $h(z(t)) \neq 0$.,

De este argumento queda claro que para resolver la ecuación (2.2) encontramos primero las primitivas H y G y formamos la expresión

$$H(y) = G(t) + C. \tag{2.4}$$

A continuación despejamos y como función de t. Si no es posible despejar, se acostumbra llamar a (2.4) la solución de implícita de (2.2). Damos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo. Resuelva el problema

$$y' = \frac{t}{y}. \tag{2.5}$$

Evaluamos H y G,

$$H(y) = \int ydy = \frac{y^2}{2} \quad \text{y} \quad G(t) = \int tdt = \frac{t^2}{2},$$

y formamos

$$H(y) = G(t) + C,$$

de donde

$$\frac{y^2}{2} = \frac{t^2}{2} + C.$$

Despejando

$$y(t) = \pm(t^2 + 2C)^{1/2}.$$

Queda propuesto encontrar soluciones de la ecuación, con sus intervalos maximal de definición, para distintos valores de la constante C.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$y' = \frac{y}{1+t}, \tag{2.6}$$

No tiene la forma de variables separables, pero se la podemos dar escribiendola como

$$y' = \frac{\frac{1}{1+t}}{\frac{1}{y}}.$$

Evaluando H y G se obtiene

$$H(y) = \int \frac{1}{y} dy, \qquad G(t) = \int \frac{dt}{1+t},$$

de donde la solución se puede despejar como

$$y(t) = C(1+t),$$

con C una constante.

De acuerdo a la definición 1.3 el problema con condición inicial para la edo escalar de primer orden consiste en encontrar todas las soluciones del problema

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Es decir encontrar todas aquellas soluciones que satisfacen la condición inicial $y(t_0) = y_0$. El par (t_0, y_0) debe pertenece al dominio de definición de la función f.

Ejemplo, resolver el problema con condición inicial

$$y' = -\frac{t^3}{y^3}, \qquad y(-1) = 5. \tag{2.7}$$

Evaluando H y G obtenemos

$$H(y) = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} \qquad G(t) = -\int t^3 dy = -\frac{t^4}{4},$$

de donde las soluciones satisfacen

$$y^4 + t^4 = C.$$

Resolviendo para y.

$$y(t) = \pm(C - t^4)^{1/4},$$

y usando la condición inicial para calcular la constante C obtenemos que $C = 626$ con lo que la solución pedida es

$$y(t) = (626 - t^4)^{1/4}.$$

Propuesto. Cuál es el intervalo maximal de definición de esta solución ?

En el siguiente ejemplo queremos ilustrar la falta de unicidad de las soluciones para un problema con condición inicial.

Ejemplo.

$$y' = ty^{1/2}, \qquad y(0) = 0. \tag{2.8}$$

Escribiendo la ecuación como

$$y' = \frac{t}{y^{-1/2}},$$

evaluando las primitivas H, G y resolviendo para y en la expresión resultante, se obtiene

$$y(t) = \left(\frac{t^2}{4} + C\right)^2.$$

Usando la condición inicial nos da que

$$y(t) = \frac{t^4}{16}$$

es una solución al problema con condición inicial.

Notamos, sin embargo, que el problema (2.8) tiene también la solución trivial $y(t) \equiv 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así este problema tiene por lo menos 2 soluciones.

Vamos a probar que tiene infinitas. En efecto, considere la familia de funciones que dependen de un parámetro $a > 0$,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & |t| < a \\ \dfrac{(t^2 - a^2)^2}{16} & t \geq a \quad \text{o} \quad t \leq -a. \end{cases}$$

Esta función es de clase C^1 en $\mathbb{R}$ y satisface

$$y'(t) = \begin{cases} 0 & |t| < a \\ \dfrac{t(t^2 - a^2)}{4} = ty^{1/2} & |t| \geq a \end{cases}$$

por lo que es solución del problema con condición inicial para cualquier valor (dado) de $a > 0$.

Se deja como ejercicio demostrar que este problema con condición inicial tiene una familia de soluciones que dependen de dos parametros.

2.1. EDO lineales, caso escalar. Vimos que la edo lineal de orden n más general tiene la forma

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t). \tag{2.9}$$

Si $g(t) \equiv 0$ diremos que esta ecuación es *Homogénea* y *No Homogénea* en caso contrario.

Vamos a suponer de ahora en adelante la siguiente hipótesis.

(H_1) *Las funciones coeficientes* $a_i(t)$, $i = 0, \cdots, n$, *y la función* $g(t)$ *están definidas en un intervalo común* I, *donde son continuas. Además* $a_n(t) \neq 0$, *para todo* $t \in I$.

Cuando $n = 1$, (2.9) se llama ecuación lineal de primer orden y tiene la forma

$$a_2(t)y' + a_1(t)y = g(t).$$

Dividiendo por $a_1(t)$ $(a_1(t) \neq 0)$, resulta

$$y' + P(t)y = f(t), \tag{2.10}$$

donde $P(t) = \frac{a_1(t)}{a_2(t)}$ y $f(t) = \frac{g(t)}{a_2(t)}$.

Estudiemos primero la ecuación homogenea

$$y' + P(t)y = 0. \tag{2.11}$$

Observando que

$$\frac{d}{dt}e^{\int P(t)dt} = P(t)e^{\int P(t)dt},$$

y multiplicando (2.11) por $e^{\int P(t)dt}$, se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\int P(t)dt}y\right] = 0.$$

Integrando y despejando se sigue que

$$y_h(t) = Ce^{-\int P(t)dt}, \tag{2.12}$$

donde y_h denota la solución de la ecuación (homogenea) (2.11). Notamos que esta expresión nos da todas las soluciones de esta ecuación por lo que la llamamos la solución general.

Consideremos a continuación la ecuación no homogénea

$$y' + P(t)y = f(t). \tag{2.13}$$

Con un procedimiento similar, esto es, multiplicando ambos lados de la ecuación por $e^{\int P(t)dt}$ e integrando, obtenemos que la solución general de la ecuación no homogenea queda dada por

$$y(t) = ce^{-\int P(t)dt} \quad + e^{-\int P(t)dt} \int f(t) e^{\int p(t)dt}. \tag{2.14}$$

La expresión

$$y_p(t) := e^{-\int P(t)dt} \int f(t) e^{\int P(t)dt} dt \tag{2.15}$$

se llama la solución particular de la ecuación (2.13). Por directa diferenciación se tiene que y_p satisface la ecuación (2.13), es decir, satisface

$$y_p'(t) + P(t)y_p(t) = f(t).$$

Se tiene entonces que la solución general de la ecuación no homogenea se puede escribir como

$$y(t) \quad = y_h(t) + y_p(t).$$

A continuación se presentan algunos ejemplos de ecuaciones lineales de primer orden. Considere la ecuación

$$ty'(t) - 4y(t) = t^5 e^t, \quad t \in (0, \infty), \tag{2.16}$$

que escrita en su forma normal queda

$$y'(t) - \frac{4y(t)}{t} = t^4 e^t, \quad t \in (0, \infty). \tag{2.17}$$

Comparando con la ecuación (2.13), se observa que $P(t) = -\frac{4}{t}$ y $f(t) = t^4 e^t$.

Después de algunos calculos se obtiene que

$$(\frac{y}{t^4})' = e^t,$$

e integrando

$$y(t) = ct^4 + t^4 e^t,$$

que es la solución general de la ecuación (2.17).

Consideremos a continuación un ejemplo de un problema con condición inicial.

$$t\frac{dy}{dt} + y = 2t, \qquad y(1) = 0, \qquad t \in (0, \infty). \tag{2.18}$$

En su forma normal

$$y' + \frac{y}{t} = 2, \qquad y(1) = 0, \qquad t \in (0, \infty). \tag{2.19}$$

Después de algunos cálculos, se obtiene que

$$(ty)' = 2t$$

e integrando

$$y(t) = \frac{c}{t} + t \qquad \text{para} \quad t > 0.$$

Usando la condición inicial, se tiene que la solución pedida es

$$y(t) = t - \frac{1}{t}.$$

Consideremos a continuación un ejemplo de una la ecuación diferencial que es no lineal pero que se puede reducir a una lineal.
Ejemplo.

$$y' = \frac{1}{t + y^2}. \tag{2.20}$$

Escrita de esta manera, esta ecuación es no lineal. Sin embargo, si la escribimos como

$$\frac{dt}{dy} - t = y^2 \tag{2.21}$$

se convierte en una ecuación lineal, eso si que aquí en vez de pedir y como función de t buscamos t como función de y. Resolviendo, se obtiene

$$t = e^y c + e^y \int y^2 e^{-y} dy.$$

Como

$$\int y^2 e^{-y} dyx = -e^{-y} y^2 - 2e^{-y} y - 2e^{-y},$$

la solución queda dada entonces por

$$t(y) = ce^y - y^2 - 2y - 2.$$

2.2. Algunas ecuaciones no lineales. Explicaremos a continuación métodos para resolver ciertas ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. La idea general es introducir un cambio de variables adecuado para reducir la ecuación a otra que sea conocida.

Comenzamos con un tipo de ecuaciones que tienen una cierta propiedad de homogeneidad, la cual se va a usar para llevarla a una conocida. Primero un ejemplo.

Ejemplo. Consideremos la edo

$$y' = -\frac{t^2 + y^2}{t^2 - ty}, \tag{2.22}$$

que no es lineal y tiene la forma

$$y' = f(t, y).$$

Denotando $M(t, y) := t^2 + y^2$ y $N(t, y) := t^2 - ty$ la ecuación se puede escribir como

$$y' = -\frac{M(t, y)}{N(t, y)}$$

Observamos que las funciones M y N tienen la siguiente propiedad

$$M(st, sy) = s^2 M(t, y), \quad N(st, sy) = s^2 N(t, y),$$

para cualquier $s \neq 0$. Esto sugiere hacer el cambio de variables $y = ut$, donde u se considera una nueva variable dependiente. Reemplazando $y' = u't + u$ en la ecuación diferencial se obtiene

$$u' = -\frac{1}{t}\frac{1+u}{1-u},$$

que escrita como

$$u' = -\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1-u}{1+u}},$$

resulta ser de variables separables. Utilizando la notación introducida para dicho tipo de ecuaciones, se tiene despues de algunos cálculos, que

$$H(u) = \int (\frac{1-u}{1+u})du = \log((1+u)^2) - u, \quad \text{y} \quad G(t) = -\log|t|.$$

Reemplazando $u = \dfrac{y}{t}$ se obtiene finalmente que las soluciones satisfacen

$$(t + y)^2 = C^{\frac{y}{t}}.$$

Más generalmente, consideremos la ecuación homogenea

$$y' = -\frac{M(t, y)}{N(t, y)}, \tag{2.23}$$

donde M y N son funciones continuas y homogeneas de grado α , es decir satisfacen

$$M(st, sy) = s^\alpha M(t, y), \qquad N(st, sy) = s^\alpha N(t, y)$$

(note que puede ser necesario restringir los valores de s).

Haciendo el cambio de variables $y = ut$ en la ecuación (2.23), nos queda

$$u't + u = -\frac{M(t,tu)}{N(t,tu)} = -\frac{M(1,u)}{N(1,u)}$$

de donde

$$u' = -\frac{u + \frac{M(1,u)}{N(1,u)}}{t}.$$

De esta forma esta ecuación se puede escribir como una de variables separables de la forma

$$u' = -\frac{g(t)}{h(u)},$$

con

$$h(u) = \frac{1}{u + \frac{M(1,u)}{N(1,u)}} \quad \text{y} \quad g(t) = -\frac{1}{t}.$$

Asi la ecuación se ha reducido a una conocida.

A continuación se muestra la **Ecuación de Bernoulli** que tiene la forma

$$y' + P(t)y = f(t)y^n$$

Notamos que para $n = 0$ y $n = 1$ la ecuación es una lineal de primer orden. Para resolver esta ecuación la escribimos en la forma

$$y^{-n}y' + P(t)y^{1-n} = f(t), \tag{2.24}$$

y hacemos el cambio de variables $u = y^{1-n}$. Derivando, se obtiene

$$y^{-n}y' = \frac{u'}{1-n}$$

y reemplazando en la ecuación (2.24) resulta la ecuación lineal

$$u' + (1-n)P(t)u = (1-n)f(t),$$

que sabemos como resolver.

Otra ecuación no lineal de primer orden es la llamada **Ecuación de Ricatti** (1676-1754), tiene la forma

$$y' = P(t) + Q(t)y + R(t)y^2. \tag{2.25}$$

En algunos casos esta ecuación se puede resolver por métodos elementales. En efecto, supongamos que se conoce una solución y_1 de la ecuación (2.25) y queremos encontrar todas las otras soluciones. Para esto definamos $z(t) = y(t) - y_1(t)$ y reemplacemos en (2.25), se obtiene

$$y' = z' + y_1' = P(t) + Q(t)(z + y_1) + R(t)(z^2 + 2zy_1 + y_1^2),$$

la cual usando que y_1 es solución, se simplifica a

$$z' - (Q(t) + 2y_1(t)R(t))z = R(t)z^2,$$

que resulta ser una ecuación de Bernoulli, con $n = 2$, que ya sabemos como resolver.

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$y' = 6 + 5y + y^2. \tag{2.26}$$

En este caso como $P = 6$, $Q = 5$, y $R = 1$, se tiene que una solución particular es $y_1(t) = -2$. Sea $y = -2 + z$, entonces z satisface la ecuación

$$z' - z = z^2,$$

que como dijimos recién es una ecuación de Bernoulli, con $n = 2$. Haciendo el cambio $u = z^{-1}$ se obtiene que u satisface

$$u' + u = -1$$

de donde

$$u(t) = ce^{-t} - 1.$$

Volviendo a las variables originales

$$z(t) = \frac{1}{ce^{-t} - 1}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} y(t) &= -2 + z(t) \\ &= -2 + \frac{1}{ce^{-t} - 1}. \end{aligned}$$

Notamos que haciendo $c = 0$ obtenemos la solución $y(t) = -3$.