MA26A, Auxiliar 6, 10 de Mayo, 2007

Profesor Cátedra: Raúl Manasevich

Profesor Auxiliar : Alfredo Núnez

1. Sistemas de Ecuaciones.

1.1. Resuelva el siguiente sistemas de ecuaciones:

$$x' = Ax,$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & a \end{bmatrix}$$

donde a, b, c y $d \neq 0$ son costantes

Solución:

Obtener los valores propios de la matriz A.

$$|A - \lambda I| = P(\lambda)$$

se obtienen los valores propios a partir de las raices del polinomio caracteristico

$$P(\lambda) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ c & a-\lambda & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 + bc\right] - bc(a-\lambda) = (a-\lambda)^3 = 0$$

$\lambda = a$, valor propio de A, con multipicidad 3.

se obtendran los vectores propios de la matriz A.

$$\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = 0 \qquad v_1 = -\frac{d}{c}v_3 \qquad \Rightarrow \vec{v} = v_3 \begin{bmatrix} -\frac{d}{c} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ c \end{bmatrix} e^{at}$$

Intento:

$$\vec{x}_2 = \vec{v}te^{at} + \vec{k}e^{at}$$

se debe obtener el vector k.

$$\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

$$k = -\frac{d}{b} \qquad k_1 = -\frac{d}{c}k_3 \quad \Rightarrow \vec{k} = k_3 \begin{bmatrix} -\frac{d}{c} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Rightarrow k_3 = 0$$

luego

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ c \end{bmatrix} te^{at} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix} e^{at}$$

intento:

$$\vec{x}_3 = \vec{v}\frac{t^2}{2}e^{at} + \vec{k}te^{at} + \vec{p}e^{at}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = 0 \qquad p_1 = -\frac{d}{c}p_3 - \frac{d}{bc} \qquad \Rightarrow \vec{p} = p_3 \begin{bmatrix} -\frac{d}{c} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{d}{bc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Rightarrow p_3 = 0$$

luego

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} e^{at} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix} te^{at} + \begin{bmatrix} -\frac{d}{bc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{at}$$

finalmente la solución del sistema es:

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$$

1.2. Considere el sistema de ecuaciónes $x' = A(t)x$, donde $A : I \to M_{n\times n}$ es continua en el intervalo I. Sea $\phi(t)$ una matriz (cada t) formada por columnas que son soluciones de la ecuación diferencial. Demuestre que para cualquier $t, t_0 \in I$ la siguiente relación es verdadera:

$$|\phi(t)| = |\phi(t_0)|\, e^{\int_{t_0}^{t} tr[A(s)]ds}$$

donde $|\phi(t)|$ denota el determinante de la matriz $\phi(t)$. Suponga que las soluciones que forman $\phi(t)$ son linealmente independientes.

Solución

$$|\phi(t)| = \det[x^1(t) \ldots\ldots x^n(t)]$$

$$\frac{d\,|\phi(t)|}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \det[x^1(t), \ldots (x^i)'(t), \ldots, x^n(t)]$$

$$\frac{d\,|\phi(t)|}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \det[x^1(t), \ldots A(t)x^i(t), \ldots, x^n(t)]$$

pero para cada t se cumple:

$$A(t)x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(t)x_i^j(t) \tag{1.1}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d\,|\phi(t)|}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \det\left[x^1(t), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}(t)x^j(t), \ldots, x^n(t)\right]$$

aplicando propiedades de det

$\Rightarrow$

$$\frac{d\,|\phi(t)|}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ii})\det\left[x^1(t), \ldots, x^j(t), \ldots, x^n(t)\right]$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d\,|\phi(t)|}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ii})\,|\phi(t)|$$

Sea $T(t) : \Re^N \to \Re^N$ tal que $A(t)$ es su representante en la base canónica, entonces de (1.1), α_{ij} es el representante de $T(t)$ en la base $\{x^i(t)\}_{i=1,\ldots,n}$

$\Rightarrow$

$$traza[T(t)] = traza\,[\alpha_{ij}] = traza[A(t)]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d\,|\phi(t)|}{dt} = tr[A(t)]\,|\phi(t)|$$

finalmente

$$|\phi(t)| = |\phi(t_0)|\,e^{\int_{t_0}^{t} tr[A(s)]ds}$$

1.3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones, encontranto la matriz exponencial:

$$x' = Ax,$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

Solución:

en primer lugar se obtendran los valores y vectores propios de la matriz A

Valores propios:

$$\lambda_1 = a + b \qquad \lambda_2 = a - b \qquad \lambda_3 = a$$

Vectores propios correspondientes a cada valor propio:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método 1: Valores y vectores propios generalizado

$$\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(a+b)t} \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{(a-b)t} \qquad \vec{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{at}$$

luego

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} e^{(a+b)t} & 0 & e^{(a-b)t} \\ 0 & e^{at} & 0 \\ e^{(a+b)t} & 0 & -e^{(a-b)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \Phi(t)\vec{c}$$

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{(a+b)t} & 0 & e^{(a-b)t} \\ 0 & e^{at} & 0 \\ e^{(a+b)t} & 0 & -e^{(a-b)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

finalmete

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}$$

Método 2: Ocupando forma canónica de Jordan

solución:

$$D = \begin{bmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(a+b)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(a-b)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

finalmente

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}$$

Método 3: Despejando variables

(1) $\quad x' = ax + bz$

(2) $\quad y' = ay$

(3) $\quad z' = bx + az$

de (2) $\Rightarrow$

$$y(t) = C_2 e^{at}$$

de (3) $\Rightarrow$

$$x = \frac{z' - az}{b} \qquad \Rightarrow \qquad x' = \frac{z'' - az'}{b}$$

en (1) $\Rightarrow$

$$z'' - 2az' + (a^2 - b^2)z = 0$$

$Z_h = e^{mt} \quad \Rightarrow \quad m^2 - 2am + (a^2 - b^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = a - b \quad m_2 = a + b \Rightarrow$

$$z(t) = c_1 e^{(a+b)t} + c_3 e^{(a-b)t}$$

$\Rightarrow$

$$x(t) = c_1 e^{(a+b)t} - c_3 e^{(a-b)t}$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(a+b)t} & 0 & -e^{(a-b)t} \\ 0 & e^{at} & 0 \\ e^{(a+b)t} & 0 & e^{(a-b)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

finalmente

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}$$

Método 4: Serie infinita

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

como $A = PDP^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^k = PD^kP^{-1}$

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a+b)^k & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[(a+b)^k + (a-b)^k\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[(a+b)^k - (a-b)^k\right] \\ 0 & a^k & 0 \\ \frac{1}{2}\left[(a+b)^k - (a-b)^k\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[(a+b)^k + (a-b)^k\right] \end{bmatrix}$$

$$\left(e^{At}\right)_{11} = \left(e^{At}\right)_{33} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+t)^k t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-b)^k t^k}{k!}\right] = \frac{1}{2}e^{(a+b)t} + \frac{1}{2}e^{(a-b)t}$$

$$\left(e^{At}\right)_{13} = \left(e^{At}\right)_{31} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+t)^k t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-b)^k t^k}{k!}\right] = \frac{1}{2}e^{(a+b)t} - \frac{1}{2}e^{(a-b)t}$$

$$\left(e^{At}\right)_{22} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+t)^k t^k}{k!} = e^{at}$$

finalmente

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}$$

Método 5: Cayley-Hamilton

$$f(\lambda) = e^{\lambda t} \qquad ; \qquad g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2$$

$$\lambda_1 = a \quad \Rightarrow \quad (1) \quad f(\lambda_1) = g(\lambda_1) \quad \Leftrightarrow \quad e^{at} = \alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2$$

$$\lambda_2 = a+b \quad \Rightarrow \quad (2) \quad f(\lambda_2) = g(\lambda_2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{(a+b)t} = \alpha_0 + \alpha_1(a+b) + \alpha_2(a+b)^2$$

$$\lambda_3 = a-b \quad \Rightarrow \quad (3) \quad f(\lambda_3) = g(\lambda_3) \quad \Leftrightarrow \quad e^{(a-b)t} = \alpha_0 + \alpha_1(a-b) + \alpha_2(a-b)^2$$

se debe resolver este sistema que tiene 3 inconitas $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ y 3 ecuaciones

luego

$\alpha_0 = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) e^{at} + \left(-\frac{a}{2b} + \frac{a^2}{2b^2}\right) e^{(a+b)t} + \left(\frac{a}{2b}\frac{a^2}{2b^2}\right) e^{(a-b)t}$

$\alpha_1 = \frac{1}{2b^2}\left[(b-2a)e^{(a+b)t} - (b-2a)e^{(a-b)t} + 4ae^{at}\right]$

$\alpha_2 = \frac{1}{2b^2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t} + e^{at}\right]$

$\Rightarrow$

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 a & 0 & \alpha_1 b \\ 0 & \alpha_1 a & 0 \\ \alpha_1 b & 0 & \alpha_1 a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2(a^2+b^2) & 0 & \alpha_2 2ab \\ 0 & \alpha_2 a^2 & 0 \\ \alpha_2 2ab & 0 & \alpha_2(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

reemplazando los valores obtenidos de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ en e^{At} se obtiene el resultado final.

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}$$

Método 6: Laplace

$$e^{At} = Ł^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} s-a & 0 & -b \\ 0 & s-a & 0 \\ -b & 0 & s-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(s-a)}{(s-a)^2-b^2} & 0 & \frac{b}{(s-a)^2-b^2} \\ 0 & \frac{1}{s-a} & 0 \\ \frac{b}{(s-a)^2-b^2} & 0 & \frac{(s-a)}{(s-a)^2-b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aplicamos Laplace a $(sI - A)^{-1}$.

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}\right\} = e^{at}Ł^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - b^2}\right\} = \frac{e^{at}}{2}Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s+b} + \frac{1}{s-b}\right\}$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}\right\} = \frac{1}{2}\left(e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right)$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}\right\} = e^{at}Ł^{-1}\left\{\frac{b}{s^2 - b^2}\right\} = \frac{e^{at}}{2}Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b}\right\}$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}\right\} = \frac{1}{2}\left(e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right)$$

finalmente

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] \\ 0 & e^{at} & 0 \\ \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} - e^{(a-b)t}\right] & 0 & \frac{1}{2}\left[e^{(a+b)t} + e^{(a-b)t}\right] \end{bmatrix}$$

1.4. Considere la ecuación diferencial $x' = Ax$ donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

es una matriz real que satisface $\det(A) \neq 0$. Vamos a suponer que el polinomio caracteristico de A tiene un solo valor propio λ_1 real con multiplicidad dos y que el $\dim\ker(A - \lambda_1 I) = 1$, y que K es el vector propio. Sabemos que para formar la solución general hay que encontrar un vector propio generalizado P linealmente independiente de K.

(a) Demuestre que P se puede encontrar como solución de la ecuación

$$(A - \lambda_1 I) = K$$

(b) Demuestre que el representante Λ de A segun la base $\{K, P\}$ es

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

(c) Defina κ=[K,P]. Evalue primero $\kappa^{-1}K$ y $\kappa^{-1}P$. Demuestre entonces que

$$\Lambda = \kappa^{-1}A\kappa$$

(d) Defina $x = \kappa y$ con $y = [y_1, y_2]^T$. Encuentre el sistema de ecuaciones diferenciales que satisface y (sistema canónico) y resuelva este sistema. suponiendo que $\lambda_1 < 0$, Que puede decir de la estabilidad del origen?

Solución:

parte (a):

$P \in \ker(A - \lambda_1 I)^2 \quad \Rightarrow$

$$(A - \lambda_1 I)^2 P = 0$$

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_1 I)P = 0$$

sea $\Delta = (A - \lambda_1 I)P \quad \Rightarrow$

$$(a - \lambda_1)\Delta = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \Delta$ es vector propio de A

$\Rightarrow \quad \Delta = K \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_1 I)P = K$

parte (b):

Base $\{K, P\}$

$\Rightarrow \quad AK = \lambda_1 K$

$\Rightarrow \quad AP = \lambda_1 P + K$

$\Rightarrow$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

parte (c):

$\kappa = [K, P]$

$\Rightarrow \quad \kappa^{-1}\kappa = I$

$\Rightarrow$

$$\left[\kappa^{-1}K | \kappa^{-1}P\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\kappa^{-1}K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \kappa^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \kappa^{-1}A\kappa = \kappa{-}1[AK\ AP] = \kappa^{-1}\left[\lambda_1 K|\lambda_1 P + K\right]$$

$$\Lambda = \left[\lambda_1\kappa^{-1}k|\lambda_1\kappa^{-1}P + \kappa^{-1}K\right]$$

finalmente

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

parte (d):

$x = \kappa y \quad \Rightarrow \quad y' = \Lambda y$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$y_1' = \lambda_1 y_1 + y_2$

$y_2' = \lambda_1 y_2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = y_2(0)e^{\lambda_1 t}$

$$y_1' - \lambda_1 y_1 = y_2(0)e^{\lambda_1 t}$$

$$\left(e^{-\lambda_1 t}y_1\right)' = y_2(0)$$

$\Rightarrow$

$$e^{-\lambda_1 t}y_1 = y_1(0) + ty_2(0)$$

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}y_1(0) + te^{\lambda_1 t}y_2(0)$$

luego las soluciones son:

$y_2 = y_2(0)e^{\lambda_1 t}$

$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}y_1(0) + te^{\lambda_1 t}y_2(0)$

si $\quad t \to \infty \quad \Rightarrow$

$y_1 \to 0$

$y_1 \to 0$

$\Rightarrow \quad$ el sistema es estable.

1.5. Sea $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, una matriz real $n \times n$ de clase $\mathcal{C}^1$(derivada continua). Suponga que $\Phi(0) = I$ y que $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Demuestre primero que existe una matriz A talque $\Phi(t) = e^{At}$. Demuestre a continuación que esta matriz A es única.

Solución:

Existencia

$\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s) \quad \Rightarrow \quad \Phi'(t+s) = \Phi'(t)\Phi(s)$

luego en $t = 0$

$\Phi(0) = I$

$\Phi'(s) = \Phi'(0)\Phi(s) \quad \forall s$

$\Rightarrow$

$$\Phi(t) = \Phi(0)e^{\Phi'(0)t} = e^{\Phi'(0)t}$$

observación:

$$\Phi(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(h) - I}{h}$$

observación: $\quad$ si $\Phi(t) = e^{At} \quad \Rightarrow \quad \Phi'(t) = A\Phi(t) \quad \forall t$

luego $\quad t = 0 \quad \Phi'(0) = A\Phi(0) = A$

Unicidad

Si tambien $\Phi(t) = e^{Bt} \quad \Rightarrow \quad \Phi'(t) = Be^{Bt} \quad \forall t$

Además $\quad \Phi'(t) = \Phi(0)e^{\Phi'(0)t} \quad \forall t$

luego en $t = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Phi'(0) = B = A$$

1.6. Responder las siguientes preguntas:

(a) $\quad x' = Ax \quad$ A matriz de 3×3 cuyos valores propios satisfacen que: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ se satisface además que $\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 1$, Cual es la solución?

(b) $\quad x' = Ax \quad$ A matriz de 3×3 cuyos valores propios satisfacen que: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ se satisface además que $\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 2$, Cual es la solución?

(c) $\quad x' = Ax \quad$ A matriz de 3×3 cuyos valores propios satisfacen que: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ se satisface además que $\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 2$, Cual es la solución?

Solución:

parte (a):

$x' = Ax \quad ; \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

$\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 2$

$\Rightarrow$

$$\vec{X} = c_1\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{K}_2 e^{\lambda_1 t} + c_3\vec{K}_3 e^{\lambda_3 t}$$

$\vec{K}_1$ y $\vec{K}_2 \quad$ vectores propios asociados a $\quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

$\vec{K}_3 \quad$ vectores propios asociados a

$\lambda = \lambda_3$

parte (b):

$x' = Ax \quad ; \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 1$

$\Rightarrow$

$$\vec{X} = c_1\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\left(\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t}\vec{P}_1 e^{\lambda_1 t}\right) + c_3\vec{K}_3 e^{\lambda_3 t}$$

$\vec{K}_1$ vector asociado a $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

$\left(A - \lambda_1 I\vec{P}_1\right) = \vec{K}_1$ $\vec{P}_1$ vector propio generalizado.

$\vec{K}_3$ vector propio asociado a $\lambda = \lambda_3$

parte (c):

$x' = Ax \quad ; \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$\dim[\ker(A - \lambda_1 I)] = 2$

$\Rightarrow$

$$\vec{X} = c_1\vec{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{K}_2 t e^{\lambda_1 t} c_3\left(\vec{K}e^{\lambda_1 t} + \vec{P}e^{\lambda_1 t}\right)$$

$\vec{K}_1$ y $\vec{K}_2$ vectores propios asociados a $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$\vec{K} = \mu_1\vec{K}_1 + \mu_2\vec{K}_2$ combinación lineal de los vectores propios.

$(A - \lambda_1 I)\vec{P} = \vec{K} \quad \Rightarrow$ ecuación que determina μ_1 en función de μ_2 y $\vec{P}$.

1.7. Considere el problema con condiciónes iniciales

$$x' = Ax \quad ; \quad x(0) = x_0$$

donde A es una matriz de $n \times n$ de numeros reales. Vimos en clases que la solución de este problema es $x(t) = x_0 e^{At}$, donde e^{At} es la matriz exponencial de A. Recuerde que $e^{0A} = I$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

(i) Demuestre que la matriz exponencial satisface la siguiente la propiedad de semigrupo:

$$e^{(t+s)A} = e^{At} e^{sA} \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

Demuestre de aqui que $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$

(ii) Sean A, B dos matrices reales de $n \times n$. Demuestre que

$$Be^{At} = e^{At} B \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

si y solo si $AB = BA$.

(iii) Demuestre que

$$e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

si y solo si $AB = BA$.

Solución:

parte (i):

por demostrar que $\quad e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

Sean $\quad u(t) = e^{(t+s)A} c \quad ; \quad v(t) = e^{tA} e^{sA} c$

$\Rightarrow$

$u'(t) = Ae^{(t+s)A} c = Au(t) \quad \Rightarrow \quad u(0) = e^{st} c$

$v'(t) = Ae^{tA}e^{sA}c = Av(t) \quad \Rightarrow \quad v(0) = e^{sA}c$

luego por teorema de existencia y unicidad $\quad \Rightarrow u(t) = v(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow \quad \left[e^{tA}e^{sA} - e^{(t+s)A}\right] c = 0 \quad \forall t \quad \forall c$

luego

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$$

por demostrar que $\quad \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$

sea $s = -t \quad \Rightarrow$

$$e^{(t-t)A} = e^{tA}e^{-tA}$$

$\Leftrightarrow$

$$I = e^{tA}e^{-tA} = e^{-tA}e^{tA}$$

luego multiplicando por el inverso de (e^{tA}) que equivale a $\left(e^{tA}\right)^{-1}$

$\Rightarrow$

$$\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}I$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$$

parte (ii):

Por demostrar que

$$Be^{At} = e^{At}B \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA$$

$(\Leftarrow)$

sea $BA = AB$

Sean $\quad u(t) = e^{tA}Bc \quad ; \quad v(t) = Be^{tA}c$

$\Rightarrow$

$u'(t) = Ae^{tA}Bc = Au(t) \quad \Rightarrow \quad u(0) = ABc$

$v'(t) = BAe^{tA}c = ABe^{tA}c = Av(t) \quad \Rightarrow \quad v(0) = ABc$

luego por teorema de existencia y unicidad $\quad \Rightarrow u(t) = v(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow \quad \left[e^{tA}B - Be^{tA}\right]c = 0 \quad \forall t \quad \forall c$

luego

$$e^{tA}B = Be^{tA}$$

$(\Rightarrow)$

sea $e^{tA}B = Be^{tA}$

$\Rightarrow$

$$Ae^{tA}Bc = BAe^{tA}c$$

evaluanco en $t = 0$
$\Rightarrow$

$$[AB - BA]\,c = 0 \quad \forall c$$

$\Rightarrow$

$$AB = BA$$

parte (iii):

Por demostrar que

$$e^{t(A+B)} = e^{At}e^{Bt} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA$$

$(\Leftarrow)$

sea $BA = AB$

Sean $\quad u(t) = e^{t(A+B)}c \quad ; \quad v(t) = e^{tA}e^{tB}c$

$\Rightarrow$

$u'(t) = (A+B)e^{t(A+B)}c = (A+B)u(t) \quad \Rightarrow \quad u(0) = c$

$v'(t) = Ae^{tA}e^{tB}c + e^{tA}Be^{tB}c$

$\Leftrightarrow$

$v'(t) = Ae^{tA}e^{tB}c + Be^{tA}e^{tB}c = (A+B)v(t) \quad \Rightarrow \quad v(0) = c$

luego por teorema de existencia y unicidad $\quad \Rightarrow u(t) = v(t) \quad \forall t$

$\Rightarrow$

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$$

$(\Rightarrow)$

$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$

$\Rightarrow$

$$(A+B)e^{t(A+B)} = Ae^{tA}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt}$$

$\Rightarrow$

$$(A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{Bt} = e^{At}Be^{Bt}$$

$$e^{tA}Be^{tB} = Be^{tA}e^{tB}$$

multiplicando por e^{-tB}

$$e^{tA}BI = Be^{tA}I$$

$$e^{tA}B = Be^{tA}$$

luego por parte (ii)

$$AB = BA$$

1.8. Considere el sistema de ecuaciones

$$x_1' = 2x_1 - 3x_2 \quad ; \quad x_2' = -3x_1 + 2x_2$$

(a) Encuentre la solución de este sistema por medio de la matriz exponencial de la matriz correspondiente.

(b) Redizca el sistema a su forma canónica (en las coordenadas(y_1, y_2)). Encuentre los puntos críticos y clasifiquelos.

Solución:

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} x$$

parte (a):

valores propios

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad ; \quad \lambda_2 = 5$$

vector propio asociado a λ_1

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

vector propio asociado a λ_2

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\vec{X} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\vec{x}(0)$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = e^{At}\vec{x}(0)$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \frac{e^{5t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{-t}-e^{5t}}{2} \\ \frac{e^{-t}-e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

parte (b):

$$X = KY = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y$$

$\Rightarrow \quad \dot{Y} = DY \quad \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Puntos criticos: $\dot{X} \quad AX = 0 \quad A$ es invertible $\Rightarrow \quad X = (0,0)^T$ es el único punto critico.

$\dot{y}_1 = 5y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = C_1 e^{5t}$

$\dot{y}_2 = -1y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = C_2 e^{-t}$

El punto encontrado es un punto silla.

1.9. (a) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ con I_n la matriz identidad de $n \times n$.

Demuestre que se cumple:

$$\cosh(t) I_{2n} = \frac{e^{At} + e^{-At}}{2}$$

$$\sinh(t) I_{2n} = A \frac{e^{At} - e^{-At}}{2}$$

(b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ con I_n la matriz identidad de $n \times n$.

Demuestre que se cumple:

$$\cos(t) I_{2n} = \frac{e^{At} + e^{-At}}{2}$$

$$\sin(t) A = \frac{e^{At} - e^{-At}}{2}$$

Solución:

parte (a):

Sea $A^0 = I_{2n}$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = A$$

luego $\quad A^{2n} = I_{2n} \quad ; \quad A^{2n+1} = A \quad n = \{0, \ldots, \infty\}$

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{At} = I_{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

se sabe que

$\cosh(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$

$\sinh(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

luego

$$e^{At} = I_{2n} \cosh(t) + A \sinh(t) \tag{1.2}$$

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} A^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1} A^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-At} = I_{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} - A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-At} = I_{2n} \cosh(t) - A \sinh(t) \tag{1.3}$$

luego sumando las igualdades (1.2) y (1.3) $\Rightarrow$

$$\cosh(t)I_{2n} = \frac{e^{At} + e^{-At}}{2}$$

restando las igualdades, (1.2) menos (1.3) $\Rightarrow$

$$\sinh(t)I_{2n} = A\frac{e^{At} - e^{-At}}{2}$$

parte (b):

Sea $A^0 = I_{2n}$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = A \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = -A \quad \Rightarrow \quad A^4 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = A \quad \Rightarrow \quad A^6 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$$

luego $A^{2n} = (-1)^n I_{2n} \quad ; \quad A^{2n+1} = (-1)^n A \quad n = \{0, \ldots, \infty\}$

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n I_{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{At} = I_{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

se sabe que

$\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$

$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

luego

$$e^{At} = I_{2n}\cos(t) + A\sin(t) \tag{1.4}$$

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} A^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1} A^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n} t^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{2n}(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{-At} = I_{2n}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} - A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{At} = I_{2n}\cos(t) - A\sin(t) \tag{1.5}$$

luego sumando las igualdades (1.4) y (1.5) $\Rightarrow$

$$\cos(t)I_{2n} = \frac{e^{At} + e^{-At}}{2}$$

restando las igualdades, (1.4) menos (1.5) $\Rightarrow$

$$\sin(t)A = \frac{e^{At} - e^{-At}}{2}$$