MA26A, Auxiliar 5, 26 de Abril, 2007

Profesor Cátedra: Raúl Manasevich

Profesor Auxiliar : Alfredo Núnez

1. Transformada de Laplace.

1.1. Sea $f : [0, \infty) \to \Re$ función continua a trozos y de orden exponencial. Demuestre que si $F(s)$ denota la transformada de Laplace de f, entonces:

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Solución:

$f(t)$ es de orden exponencial $\Rightarrow$

$$|f(x)| \leq Me^{cx}$$

$$|e^{-sx} f(x)| \leq Me^{-(s-c)x}$$

Notar que la integral de la función de la derecha converge para $s > c$, entonces la transformada de Laplace de $f(x)$ converge absolutamente para $s > c$.

$$|F(s)| = |\int_o^\infty e^{-sx} f(x)dx| \leq \int_0^\infty |e^{-sx} f(x)dx| \leq M \int_0^\infty e^{-(s-c)x}dx = \frac{M}{s-c}; s > c$$

Luego

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

1.2. Sea $f : (0, \infty) \to \Re$ continua en $(0, \infty)$ y de orden exponencial y tal que

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$$

(a) Si $\lim_{t\to 0^+} t^\alpha f(t) = 1$, $\alpha \in (0,1)$, demuestre que la transformada de laplace de la función existe.

(b) La transformada de Laplace de la función $t^{-\frac{1}{2}}\cosh(t)$ tiene la forma

$$I = h(s)\sqrt{s + \sqrt{(s^2-1)}}$$

Encuentre $h(s)$ y de aquí la expresión final de la transformada.

Solución:

$$Ł\{f(t)\} = I = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^T f(t)e^{-st}dt + \int_T^\infty f(t)e^{-st}dt$$

sea:

$I_1 = \int_0^T f(t)e^{-st}dt$

$I_2 = \int_T^\infty f(t)e^{-st}dt$

I_2 existe puesto que $f(t)$ es de orden exponecial en $(0,\infty)$

$$I_1 = \int_0^T f(t)e^{-st}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^T f(t)e^{-st}dt$$

Sea $t \in (0,\varepsilon_0)$. Ocupando el dato se tiene que $|t^\alpha f(t) - 1| \le \mu$ entonces:

$$-\mu \le t^\alpha f(t) - 1 \le \mu$$

$$-\mu + 1 \le t^\alpha f(t) \le \mu + 1$$

$\Leftrightarrow$

$$|t^\alpha f(t)| \le \mu + 1$$

$$|f(t)| \le \frac{\mu+1}{t^\alpha}$$

Ocupando estas cotas:

$$\int_\varepsilon^T f(t)e^{-st}dt = \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} f(t)e^{-st}dt + \int_{\varepsilon_0}^T f(t)e^{-st}dt$$

de esta última expresión se debe analizar el primer término puesto que el segundo existe.

$$|\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} f(t)e^{-st}dt| \leq \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{1+\mu}{t^{\alpha}}e^{-st}dt \leq (1+\mu)\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} t^{-\alpha}dt \leq \frac{1+\mu}{1-\alpha}(\varepsilon_0^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha})$$

luego

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\mu)(\varepsilon_0^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha})}{1-\alpha} = \frac{(1+\mu)\varepsilon_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$\Rightarrow I_1 \leq \infty \Rightarrow I < \infty$ y luego $\quad Ł\{f(t)\}\quad$ existe.

Parte b:

$$Ł\left\{t^{-\frac{1}{2}}\coth(t)\right\} = \frac{1}{2}(Ł\left\{t^{-\frac{1}{2}e^{t}}\right\} + Ł\left\{t^{-\frac{1}{2}e^{-t}}\right\})$$

Para obtener la transformada de la función $t^{-\frac{1}{2}}$ se aplica la definición de transformada de laplace y se hace el cambio de variable $st = y^2$, $sdt = 2ydy$

$$Ł\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}t^{-\frac{1}{2}}dt = \int_0^{\infty} e^{-y^2}(\frac{y^2}{s})^{-\frac{1}{2}}\frac{2y}{s}dy = 2s^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = 2s^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Ocupando esta transformada, se aplica la propiedad:

$$Ł\{f(t)e^{at}\} = F(s-a)$$

$$Ł\left\{t^{-\frac{1}{2}}\cosh(t)\right\} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{s+1}} + \sqrt{\frac{\pi}{s-1}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\sqrt{s-1}+\sqrt{s+1}}{\sqrt{s^2-1}}\right)$$

Sea

$$A = \sqrt{s-1}+\sqrt{s+1}$$

$$A^2 = 2s + 2\sqrt{s^2-1}$$

$$A = \sqrt{2s+2\sqrt{s^2-1}}$$

$$Ł\left\{t^{-\frac{1}{2}}\cosh(t)\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^2-1}}\sqrt{2s+2\sqrt{s^2-1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sqrt{s^2-1}}\sqrt{s+\sqrt{s^2-1}}$$

$$\Rightarrow h(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2(s^2-1)}}$$

finalmente

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2(s^2-1)}}\sqrt{s+\sqrt{s^2-1}}$$

1.3. Encuentre $f(t)$ si $F(s) = \frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}$

$$F(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2-2s-8)} = \frac{s^2+1}{s(s-4)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s-2}$$

$$F(s) = \frac{A(s^2-2s-8)+B(s^2-2s)+C(s^2-4s)}{s(s-4)(s-2)}$$

$\Rightarrow$

$$s^2(A+B+C) + s(-2A-2B-4C) - 8A = s^2+1$$

$\Rightarrow$

(1) $\quad -8A = 1$

(2) $\quad A + B + 2C = 0$

(3) $\quad A + B + C = 1$

$$A = -\frac{1}{8} \quad ; \quad B = \frac{1}{8} \quad ; \quad C = 1$$

$$F(s) = -\frac{1}{8s} + \frac{1}{8(s-4)} + \frac{1}{s-2}$$

$\Rightarrow$

$$f(t) = -\frac{1}{8}Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{8}Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + Ł^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

$$f(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{4t} + e^{2t}$$

1.4. Encuentre $f(t)$ si $F(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$

Solución:

$$F(s) = \frac{As+B}{(s^2+a^2)} + \frac{Cs+D}{(s^2+b^2)} = \frac{(As+B)(s^2+b^2)+(Cs+D)(s^2+a^2)}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$$

(1) $A + C = 0$

(2) $Asb^2 + Csa^2 = s \quad \Leftrightarrow \quad Ab^2 + Ca^2 = 1$

(3) $Bs^2 + Ds^2 = 0$

(4) $Bb^2 + Da^2 = 0$

$$A = \frac{1}{(b^2-a^2)} \quad ; \quad B = 0 \quad ; \quad C = \frac{1}{(a^2-b^2)} \quad ; \quad D = 0$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\} = Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(b^2-a^2)(s^2+a^2)}\right\} + Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(a^2-b^2)(s^2+b^2)}\right\}$$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\} = \frac{1}{(b^2-a^2)}Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)}\right\} + \frac{1}{(a^2-b^2)}Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+b^2)}\right\}$$

finalmente

$$Ł^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\} = \frac{1}{(b^2-a^2)}\cos(at) + \frac{1}{(a^2-b^2)}\cos(bt)$$

1.5. Sea $H(t)$ una función igual a t cuando $0 < t < 4$ e igual a 5 cuando $t > 4$. Obtenga $Ł\{H(t)\}$ por definición y usando escalón unitario

Solución 1:
Aplicando la definición de transformada de Laplace:

$$Ł\{H(t)\} = \int_0^\infty H(t)e^{-st}dt = \int_0^4 te^{-st}dt + \int_4^\infty 4e^{-st}dt$$

$\int te^{-st}dt = -\frac{te^{-st}}{s} + \int \frac{e^{-st}}{s}dt = -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}$

$u = t \Rightarrow du = dt; \qquad dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{e^{-st}}{s}$

$$Ł\{H(t)\} = \left(-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)_0^4 + 5\left(-\frac{e^{-st}}{s^2}\right)_4^\infty$$

$$Ł\{H(t)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

Solución 2:
(usando escalón unitario)

$$H(t) = tU(t) - [t-5]U(t-4) + U(t-4)$$

$\Rightarrow$

$$H(S) = Ł\{H(t)\} = Ł\{tU(t)\} - Ł\{[t-4]U(t-4)\} + Ł\{U(t-4)\}$$

$$Ł\{H(t)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

1.6. Ocupando transformada de Laplace resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$x'' + k^2x = f(t) \quad ; \quad x(0) = x'(0) = 0$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} U(t-i)$$

Solución

Se asume que la transformada de Laplace de la Serie es la Serie de las transformadas de Laplace:

$$Ł\{f(t)\} = Ł\{\sum_{i=0}^{\infty} U(t-i)\} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-is}}{s} = \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty} \left(e^{-s}\right)^i$$

Recordando la suma geométrica:

$S_T = a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^n$

$aS_T = a^1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1}$

luego

$S_T = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \Rightarrow \frac{1}{s}\sum_{i=0}^{\infty}\left(e^{-s}\right)^i = \frac{1}{s}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(e^{-s}\right)^{n+1}}{1-e^{-s}}$

$\Rightarrow$

$$Ł\{f(t)\} = \frac{1}{s(1-e^{-s})}$$

Ahora se aplica transformada de Laplace a la ecuación diferencial

$$Ł\{x''\} + k^2 Ł\{x\} = Ł\{f(t)\}$$

sea $X(s) = Ł\{x(t)\}$

luego

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + k^2X(s) = \frac{1}{s(1-e^{-s})}$$

$\Rightarrow$

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+k^2)s(1-e^{-s})} = \frac{1}{k}\frac{k}{(s^2+k^2)s(1-e^{-s})}$$

Se conocen las transformadas de Laplace:

$$Ł^{-1}\{\frac{1}{s(1-e^{-s)}}\} = f(t) = \sum_{0}^{\infty} U(t-i)$$
$$Ł^{-1}\{\frac{k}{s^2+k^2}\} = \sin(kt)$$

Ahora se aplica el teorema de Convolución:

$$Ł^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} U(\tau-i)\sin(k(t-\tau))d\tau = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^t U(\tau-i)\sin(k(t-\tau))d\tau$$

$$x(t) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{\infty}(\int_i^t \sin(k(t-\tau))d\tau)U(t-i) = \frac{1}{k^2}\sum_{i=0}^{\infty}(-1+\cos(k(t-i)))U(t-i)$$

finalmente

$$x(t) = \frac{1}{k^2}\sum_{i=0}^{\infty}(-1+\cos(k(t-i)))U(t-i)$$

1.7. (a) Considere el problema con valores iniciales:

$$x'' + 2x' + x = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\pi}(t) \qquad ; \qquad x(0) = x'(0) = 0$$

Determine la solución usando transformada de Laplace, para esto suponga que la transformada de la serie es la serie de las transformadas y similarmente para la transformada inversa.

(b) Si $t \in [j\pi, (j+1)\pi]$ demuestre que $x(t) = e^{-t}(t\alpha_j + \beta_j)$, para ciertas constantes α_j y β_j.

Solución:

parte (a):

$$x'' + 2x' + x = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\pi}(t)$$

$\Rightarrow$

$$s^2 X(s) + 2sX(s) + X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi s}$$

$\Rightarrow$

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\pi s}}{(s+1)^2}$$

$\Rightarrow$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = Ł^{-1}\left\{F(s)\right\} = te^{-t}$$

$\Rightarrow$

$$Ł^{-1}\left\{\frac{e^{-n\pi s}}{(s+1)^2}\right\} = f(t-n\pi)U(t-n\pi) = [t-n\pi]e^{-(t-n\pi)}U(t-n\pi)$$

luego

$$x(t) = Ł^{-1}\left\{X(s)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} U(t-n\pi)[t-n\pi]e^{-(t-n\pi)}$$

parte (b):

si $\quad t \in [j\pi, (j+1)\pi]$

entonces

$$x(t) = \sum_{n=0}^{j} U(t-n\pi)[t-n\pi]e^{-(t-n\pi)} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \sum_{n=0}^{j} [t-n\pi]e^{-(t-n\pi)}$$

$$x(t) = e^{-t}\left[t\sum_{n=0}^{j} e^{n\pi} - \sum_{n=0}^{j} n\pi e^{n\pi}\right]$$

denotando

$$\alpha_j = \sum_{n=0}^{j} e^{n\pi} \qquad ; \qquad \beta_j = \sum_{n=0}^{j} n\pi e^{n\pi}$$

finalmete

$$x(t) = e^{-t}(t\alpha_j + \beta_j)$$

1.8. Usando transformada de Laplace resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + e^t\cos(t) \\ x_2' &= x_1 + x_2 + e^t\operatorname{sen}(t) \\ x_1(0) &= 0 \qquad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Solución:

Se aplica transformada de Laplace a ambas ecuaciones. Sea $X_1(s) = Ł\{x_1(t)\}$ y $X_2(s) = Ł\{x_2(t)\}$. Entonces se cumple:

$$\begin{aligned} sX_1(s) - x_1(0) &= X_1(s) - X_2(s) + \frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} \\ sX_2(s) - x_2(0) &= X_1(s) + X_2(s) + \frac{1}{(s-1)^2+1} \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones iniciales y escribiendo el problema como un sistema de ecuaciones algebraicas resulta:

$$\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} \\ \frac{1}{(s-1)^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{((s-1)^2+1)^2}\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s-1) \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{((s-1)^2+1)^2}\begin{bmatrix} (s-1)^2-1 \\ 2(s-1) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$X_1(s) = \frac{(s-1)^2 - 1}{((s-1)^2+1)^2}, \quad X_2(s) = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}$$

Ahora se calculan las transformadas inversas:

$$x_1(t) = Ł^{-1}\{\frac{(s-1)^2-1}{((s-1)^2+1)^2}\} = e^t Ł^{-1}\{\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\} = e^t Ł^{-1}\{\frac{-d(\frac{s}{(s^2+1)})}{ds}\}$$
$$x_1(t) = e^t t Ł^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)}\} = e^t t\cos(t)$$

Lo mismo para $x_2(t)$

$$x_2(t) = Ł^{-1}\{\frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}\} = e^t Ł^{-1}\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\} = e^t Ł^{-1}\{\frac{-d(\frac{1}{(s^2+1)})}{ds}\}$$
$$x_2(t) = e^t t Ł^{-1}\{\frac{1}{(s^2+1)}\} = e^t t\sin(t)$$

Finalmente la solución del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t t\cos(t) \\ e^t t\sin(t) \end{bmatrix}$$