1. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1. Introducción.

Comencemos considerando la ecuación escalar de orden n

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t), \tag{1.1}$$

con las condiciones iniciales

$$y(t_0) = d_1, \quad y'(t_0) = d_2, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = d_n, \tag{1.2}$$

donde suponemos que $t_0 \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y las funciones coeficientes $a_i(t)$, $i = 0, \cdots, n$, y $g(t)$, $t \in I$, son continuas, con $a_n(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Mostraremos que este problema se puede escribir equivalentemente como un sistema de ecuaciones diferenciales con condición inicial. Definamos

$$x_1 = y, \; x_2 = y', \cdots, x_n = y^{(n-1)}.$$

Obtenemos entonces el siguiente sistema de $n-1$ ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n. \end{aligned}$$

Como tenemos n incognitas $x_1, \cdots, x_n$ y $n-1$ ecuaciones nos falta una ecuación que se obtiene de la siguiente manera. De (1.1) dividiendo por a_n y reemplazando las definiciones anteriores nos queda

$$x_n' = b_1(t)x_1 + \cdots + b_n(t)x_n + \frac{g(t)}{a_n(t)},$$

donde

$$b_i(t) = -\frac{a_{i-1}(t)}{a_n(t)}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Estas n ecuaciones se pueden escribir como el sistema matricial

$$x' = A(t)x + f(t),$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{g(t)}{a_n(t)} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

y

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) & \cdots & b_n(t) \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

De las condiciones iniciales (1.2) se tiene que

$$y(t_0) = d_1 = x_1(t_0), \quad \cdots \quad , y^{(n-1)}(t_0) = d_n = x_n(t_0).$$

De esta forma el problema con condiciones iniciales (1.1)-(1.2) se transforma en el sistema con condiciones iniciales

$$x' = A(t)x + f(t) \qquad\qquad x(t_0) = d = [d_1 \cdots d_n]^t. \tag{1.5}$$

Si ahora partimos del sistema (1.5) donde $A(t)$ y $f(t)$ son como en (1.4), (1.3), entonces uno puede demostrar que si $x(t)$ es una solución y hacemos $y(t) = x_1(t)$

entonces $y(t)$ es solución de la ecuación escalar

$$y^{(n)} - b_n(t)y^{(n-1)} - \cdots - b_1(t)y = \frac{g(t)}{a_n(t)}.$$

En efecto, se satisface que

$$x_2 = x_1' = y', \quad x_3 = x_2' = y'', \quad \cdots, x_n = y^{(n-1)}, \quad x_n' = y^{(n)}.$$

De aquí se consigue facilmente que $y(t)$ satisface la ecuación escalar (1.1) y las condiciones iniciales (1.2).

En forma más general consideremos la ecuación diferencial lineal vectorial de primer orden,

$$x' = A(t)x + f(t) \tag{1.6}$$

donde ahora

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Supondremos de ahora en adelante:

(H_2) *las funciones* $A : I \mapsto \mathbb{M}^{n^2}$ *y* $f : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$, *son continuas en un intervalo* $I \subset \mathbb{R}$. *Equivalentemente las funciones* $a_{ij} : I \mapsto \mathbb{R}$, *y* $f_i : I \mapsto \mathbb{R}$, $i, j = 1, \cdots, n$ *son continuas en* I.

Decimos que esta ecuación es homogenea si $f(t) \equiv 0$ y no homogenea en caso contrario. De esta forma la ecuación homogenea correspondiente a (1.6) es

$$x' = A(t)x.$$

Un caso particular de estos sistemas es cuando la matriz $A(t)$ es de constantes, este caso se estudiará con bastante detalle en este curso.

Para motivar los resultados de esta sección vamos a comenzar con un ejemplo. Sea

$$x' = Ax,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imitando el caso escalar vamos a suponer soluciones de la forma $x(t) = Ke^{\lambda t}$. Reemplazando en la ecuación se obtiene que el vector K y λ deben satisfacer

$$(A - \lambda I)K = 0,$$

para tener soluciones de esta forma. Es decir λ debe ser valor propio y K vector propio. Calculando el polinomio caracteristico, se tiene

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4,$$

de donde $\det(A - \lambda I) = 0$ nos da como raices $\lambda_1 = 4$, y $\lambda_2 = -1$. Evaluando los correspondientes vectores propios se tiene, para λ_1

$$[A - 4I]K = \begin{bmatrix} -2K_1 + 3K_2 \\ 2K_1 - 3K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}.$$

Se obtiene $K_2 = \frac{2}{3}K_1$ por lo que

$$K = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Normalizando tal que $K_1 = 1$ se obtiene el vector propio (que genera un subespacio propio de dimensión uno)

$$K^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

En forma similar para λ_2 se tiene

$$K = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

y normalizando se obtiene el vector propio

$$K^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera hemos encontrado las dos soluciones del sistema,

$$x^1(t) = K^1 e^{4t} \quad \text{y} \quad x^2(t) = K^2 e^{-t}.$$

Es inmediato que la expresión

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) = c_1 K^1 e^{4t} + c_2 K^2 e^{-t},$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias es también solución del sistema. Veremos más tarde que la solución general de este sistema se puede representar en esta forma.

Notemos que $x(t)$ se puede escribir como

$$x(t) = \mathcal{K} \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \tag{1.8}$$

donde $\mathcal{K}$ es la matriz $\mathcal{K} = [K^1, K^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ cuyas columnas son los vectores propios de A. De aquí se tiene

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-t} \\ \frac{2}{3}e^{4t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Para $t = 0$, se tiene

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

de donde

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{3}{5}(x_1(0) + x_2(0)) \\ c_2 &= \frac{2}{5}x_1(0) - \frac{3}{5}x_2(0), \end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-t} \\ \frac{2}{3}e^{4t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} & e^{-t} \\ \frac{2}{3}e^{4t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

que nos da

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}e^{4t} + \frac{2}{5}e^{-t} & \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t} \\ \frac{2}{5}e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t} & \frac{2}{5}e^{4t} + \frac{3}{5}e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Definiendo la matriz

$$e^{At} := \begin{bmatrix} \frac{3}{5}e^{4t} + \frac{2}{5}e^{-t} & \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t} \\ \frac{2}{5}e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t} & \frac{2}{5}e^{4t} + \frac{3}{5}e^{-t} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

podemos escribir la solución como

$$x(t) = e^{At}x(0).$$

La matriz (1.9), como la notación lo sugiere, se llama la matriz exponencial de tA. Notamos que $e^{0 \cdot A} = I$.

Notemos a continuación que de algebra lineal se tiene que la matriz

$$\Lambda := \mathcal{K}^{-1} A \mathcal{K} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hagamos a continuación el cambio de variable

$$y = \mathcal{K}^{-1} x \quad \text{con} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

De aqui que

$$x(t) = \mathcal{K} y(t), \tag{1.10}$$

y reemplazando en la ecuación diferencial se tiene

$$y' = \mathcal{K}^{-1} x' = \mathcal{K}^{-1} A x(t) = \mathcal{K}^{-1} A \mathcal{K} y = \Lambda y(t),$$

que nos da el sistema equivalente

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 \\ y_2' &= -y_2. \end{aligned}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones escalares de primer orden (sistema esta desacoplado) que resolvemos obteniendo

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0) e^{4t} \\ y_2(t) &= y_2(0) e^{-t}. \end{aligned}$$

Podemos entonces escribir

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} y(0),$$

que nos da la solución en las coordenadas y. Como antes la matriz exponencial de $t\Lambda$ es

$$e^{t\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

La ecuación escrita en las coordenadas y, la llamaremos la representación canónica de la ecuación. Consideremos su solución $(y_1(t), y_2(t))$, eliminando t de $y_1(t) = e^{4t}y_1(0)$ e $y_2(t) = e^{-t}y_2(0)$, tenemos que $y_1(t)$, $y_2(t)$ satisfacen el lugar geométrico $y_1y_2^4 = C$. Se deja como ejercicio dibujar estos lugares geométricos para distintas condiciones iniciales de la solución.

Vamos a generalizar el ejemplo considerando ahora la ecuación más general

$$x' = Ax \qquad \text{con } A = [a_{ij}]_{n\times n}$$

una matriz de coeficientes reales. Basados en el ejemplo anterior vamos a intentar soluciones de la forma $x(t) = Ke^{\lambda t}$. Derivando se tiene, $x'(t) = AKe^{\lambda t}$, y reemplazando en la ecuación se observa que esta expresión será solución si

$$(A - \lambda I)K = 0.$$

Supongamos para continuar que $\det(A-\lambda I) = 0$ tiene n valores propios reales y distintos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, con correspondientes vectores propios $K^1, \cdots, K^n$. Entonces

$$x^i(t) = e^{\lambda_i t}K^i \quad\quad i = 1, \cdots, n$$

son n soluciones que afirmamos son linealmente independientes. En efecto, supongamos que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces para $t = 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i K^i = 0.$$

Como K^i son vectores propios correspondientes a valores propios reales y distintos, son linealmente independientes (forman una base en $\mathbb{R}^n$). Así necesariamente $c_i = 0$ para $i = 1, \cdots, n$.

Más adelante vamos a ver que la solución general de esta ecuación tiene la forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t)$$

donde $x^1(t), \cdots, x^n(t)$ son n soluciones linealmente independientes y c_i, $i = 1, \cdots, n$ constantes arbitrarias.

Como aplicación consideremos la ecuación

$$x' = Ax$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Para evaluar valores y vectores propios, formamos

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{bmatrix},$$

de donde $\det(A - \lambda I) = 0$, nos da los valores propios $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = 5$.

Evaluando los correspondientes vectores propios y normalizando, obtenemos

$$K^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K^2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera las expresiones

$$x^1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}, \quad x^2(t) = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t}, \quad \text{y} \quad x^3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

son tres soluciones (linealmente independientes) de la ecuación diferencial. De aquí que la solución general se puede representar como

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t},$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

1.2. Propiedades generales de sistemas. Consideremos la ecuación no homogenea

$$x' = A(t)x + f(t), \tag{1.12}$$

donde I es un intervalo real $A : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times n}$, $f : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$ son funciones continuas.

Por una solución a este problema entendemos una función $x : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$, de clase C^1, que satisface (1.12). En esta sección daremos algunas propiedades generales que satisfacen estas soluciones y para eso vamos primero a estudiar el problema con condiciones iniciales,

$$(CI) \qquad \begin{cases} x' = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = c, \quad t_0 \in I. \end{cases}$$

El teorema fundamental para este problema es el siguiente.

Teorema 1. *El problema (CI) tiene una única solución definida en el intervalo I.*

Este teorema nos dice que hay *existencia* y *unicidad* de soluciones para el problema (CI). La demostración del Teorema 1 será consecuencia de dos lemas que demostramos primero.

Lema 1 (Unicidad)**.** *El problema (CI) tiene a lo más una solución.*

Demostración. Supongamos que $x(t)$, $y(t)$ son dos soluciones del problema (CI) y sea $T \in I$ tal que $T > t_0$. (Si $T < t_0$ la demostración es similar). Sea $I_T = [t_0, T]$. Entonces para $t \in I_T$, integrando se tiene

$$x(t) = c + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

$$y(t) = c + \int_{t_0}^{t} A(s)y(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Sea $z(t) = x(t) - y(t)$, entonces z satisface

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)z(s)ds, \quad z(t_0) = 0.$$

Tomando norma (euclideana),

$$\mid z(t) \mid = \mid \int_{t_0}^{t} A(s)z(s)ds \mid \leq \int_{t_0}^{t} \mid A(s)z(s) \mid ds \leq \int_{t_0}^{t} \mid A(s) \mid \mid z(s) \mid ds.$$

Notando que la función $s \in I \mapsto \mid A(s) \mid$ es contínua, podemos poner $m_1 = \max_{s \in I_T} \mid A(s) \mid$. Entonces para todo $t \in I_T$, se tiene

$$\mid z(t) \mid \leq \quad m_1 \int_{t_0}^{t} \mid z(s) \mid ds.$$

Sea $r(t) = \int_{t_0}^{t} \mid z(s) \mid ds$. Derivando, se obtiene

$$r'(t) = \mid z(t) \mid \leq m_1 r(t),$$

que escribimos como

$$r'(t) - m_1 r(t) \leq 0.$$

Multiplicando por $e^{-m_1 t}$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-m_1 t} r(t)) \leq 0.$$

Integrando $\int_{t_0}^{t}$ nos da

$$e^{-m_1 t} r(t) \leq e^{-m_1 t} r(t_0) = 0,$$

que nos dice que $r(t) = 0$ para todo $t \in I_T$, y por lo tanto $|z(t)| = 0$ o equivalentemente $x(t) = y(t)$ para todo $t \in I_T$, en particular se tiene $x(T) = y(T)$. Como $T \in I$ es cualquiera se tiene el resultado. Ya que una demostración similar vale para el caso en que $T < t_0$, esto termina la demostración del lema. $\square$

Lema 2. *Para cualquier intervalo $[\alpha, \beta] \subset I$, tal que, $t_0 \in [\alpha, \beta]$ el problema (CI) tiene una solución (que es única).*

Demostración. Empezamos notando que el problema (CI) tiene una solución, $x(t)$, si y solo si

$$x(t) = c + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} b(s)ds.$$

En lo que sigue denotaremos $I_{\alpha\beta} = [\alpha, \beta]$. Definamos una sucesión de funciones $\{\phi_k\} : I_{\alpha\beta} \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de la siguiente manera

$$\phi_0(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \in I_{\alpha\beta},$$

$$\phi_{k+1} = c + \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi_k(s) + b(s)]ds \quad \text{para todo} \quad t \in I_{\alpha\beta}.$$

Es claro que estas funciones ϕ_k son contínuas en $[\alpha, \beta]$. Definamos también la sucesión de funciones $\{\psi_k\} : I_{\alpha\beta} \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por

$$\psi_k(t) = \phi_{k+1}(t) - \phi_k(t).$$

Sumando telescópicamente, se tiene que

$$\sum_{k=0}^{N} \psi_k(t) = \phi_{N+1}(t) - \phi_0(t)$$

de donde

$$\phi_{N+1}(t) = \sum_{k=0}^{N} \psi_k(t).$$

Así se tiene que $\lim\limits_{N\to\infty} \phi_{N+1}(t)$ existe si y solo si $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \psi_k(t)$ existe. Esto es, si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t)$ es convergente para cada t. Vamos a mostrar que en realidad la sucesión $\{\phi_k\}$ converge uniformemente en $I_{\alpha\beta}$.

Se tiene

$$\psi_0(t) = \phi_1(t)$$

y para $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi_k(t) = \phi_{k+1}(t) - \phi_k(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)[\phi_k(s) - \phi_{k-1}(s)]ds,$$

de donde

$$\psi_k(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\psi_{k-1}(s)ds,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea ahora $K = \max\limits_{s\in[\alpha,\beta]} \mid A(s) \mid$. Entonces

$$\mid \psi_k(t) \mid \leq \Big| \int_{t_0}^{t} \mid A(s) \mid \mid \psi_{k-1}(s) \mid ds \Big| \leq \; K \Big| \int_{t_0}^{t} \mid \psi_{k-1}(s) \mid ds \Big|.$$

De aquí, tenemos

$$| \psi_1(t) |\leq \quad K\Big|\int_{t_0}^{t} | \psi_0(s) | \, ds\Big| = K\Big|\int_{t_0}^{t} | \phi_1(s) | \, ds\Big|.$$

Como

$$\phi_1(t) = c + \int_{t_0}^{t} b(s)ds,$$

si hacemos $T = \max\{\beta - t_0, t_0 - \alpha)\}$ y $M =| c | + \sup_{s\in[\alpha,\beta]} | b(s) | T$, entonces $| \phi_1(t) |\leq M$. Se sigue que

$$| \psi_1(t) |\leq \quad KM|t - t_0|$$

para todo $t \in I_{\alpha,\beta}$, y por lo tanto

$$| \psi_2(t) |\leq \quad MK^2\frac{|t - t_0|^2}{2!}.$$

Continuamos por inducción. Así suponemos que

$$| \psi_i(t) |\leq \quad M\frac{K^i}{i!}|t - t_0|^i$$

y queremos probarlo para $i + 1$. Se tiene

$$| \psi_{i+1}(t) |\leq \quad K\Big|\int_{t_0}^{t} | \psi_i(s) | \, ds\Big| \leq M\frac{K^{i+1}}{(i + 1)!}|t - t_0|^{i+1},$$

que termina la inducción.

Recordemos en este punto que estamos estudiando $\lim_{N\to\infty} \phi_N(t)$ y que este existe si y solo si $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t)$ es convergente. Vamos a ver que esta convergencia es en realidad convergencia uniforme. Para l, m en $\mathbb{N}$ con $l > m$, se tiene

$$|\phi_l(t) - \phi_m(t)| \leq \sum_{j=m}^{l-1} |\psi_j(t)| \leq M \sum_{j=m}^{l-1} \frac{K^j}{j!} |t - t_0|^j. \tag{1.13}$$

para todo $t \in I_{\alpha,\beta}$. Como $e^{KT} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{K^j}{j!} T^j$, es entonces claro que dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 > 0$ tal que para todo $l, m \geq m_0$, $l > m$, se tiene que

$$\sum_{j=m}^{l-1} \frac{K^j}{j!} |t - t_0|^j < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Así de (1.13),

$$|\phi_l(t) - \phi_m(t)| < \varepsilon,$$

que implica

$$\sup_{t \in I_{\alpha,\beta}} |\phi_l(t) - \phi_m(t)| < \varepsilon.$$

Esto nos dice que la sucesión $\{\phi_j\}$ es de Cauchy en el espacio $C(I_{\alpha,\beta}, \mathbb{M}^{n\times 1})$, y por lo tanto converge uniformemente en $I_{\alpha,\beta}$ a una función continua ϕ.

Volvamos ahora a

$$\phi_{k+1}(t) = c + \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi_k(s) + b(s)] ds$$

que escribimos como

$$\phi(t) + \phi_{k+1}(t) - \phi(t) = c + \int_{t_0}^{t} A(s)[\phi_k(s) - \phi(s)] ds + \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi(s) + b(s)] ds.$$

De aquí

$$
\begin{aligned}
| \ \phi(t) - c - \int_{t_0}^{t} [A(s)\phi(s) + b(s)]ds \ | \ \leq& \\
\leq \ | \ \phi(t) - \phi_{k+1}(t) \ | + &\Big| \int_{t_0}^{t} A(s)[\phi_k(s) - \phi(s)]ds \Big| \\
\leq \ | \ \phi(t) - \phi_{k+1}(t) \ | + &\Big| \int_{t_0}^{t} |A(s)| \, |\phi_k(s) - \phi(s)| ds \Big|.
\end{aligned}
$$

De la convergencia uniforme de la sucesión $\{\phi_j(t)\}$ se tiene que el lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $k \to \infty$. Por lo tanto tomando $k \to \infty$ en esta desigualdad se obtiene que

$$\phi(t) = c + \int_{t_0}^{t} A(s)\phi(s)ds + \int_{t_0}^{t} b(s)ds.$$

Derivando esta expresión se obtiene que la función ϕ satisface

$$\begin{cases} \phi'(t) = A(t)\phi(t) + b(t), \quad t \in I_{\alpha\beta}, \\ \phi(t_0) = c \end{cases}$$

que es lo que queríamos. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema 1.

Demostración del Teorema 1. Sabemos de los dos lemas anteriores que para cualquier intervalo de la forma $[\alpha, \beta] \subset I$, tal que $t_0 \in [\alpha, \beta]$, el problema (CI) tiene una única solución. La demostración del teorema consiste entonces en lo siguiente: dado el intervalo I fijamos un intervalo de la forma $[\alpha, \beta] \subset I$ y extendemos la solución correspondiente a este intervalo a todo el intervalo I.

Para mostrar como se hace esta extensión vamos a considerar distintas situaciones para I.

-Si $I = [a, b]$, $t_0 \in I$, fijamos $a = \alpha$, $b = \beta$ e inmediatamente tenemos el resultado.

- Si $I = (a, b)$, con $t_0 \in I$, $-\infty < a$, $b < \infty$, entonces definimos la sucesión de intervalos $\{I_j\}$, $I_j = [a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}]$, $j \in \mathbb{N}$. Es claro que $I_j \subset I$ y que existe un j_0 tal que para todo $j > j_0$, se tendrá que $t_0 \in I_j$ y que

$$I = \cup_{j \geq j_0}^{\infty} [a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}].$$

Por los dos lemas anteriores el problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = c \end{cases} \tag{1.14}$$

tiene una única solución $x_{j_0}(t)$ definida en el intervalo I_{j_0}, tal que, $x_{j_0}(t_0) = c$. Consideremos a continuación el problema (1.14) en el intervalo I_{j_0+1}. Nuevamente por los dos lemas anteriores este problema tiene una única solución $x_{j_0+1}(t)$ definida en I_{j_0+1}, tal que, $x_{j_0+1}(t) = c$. Del Lemma 1 se tiene además que

$$x_{j_0}(t) = x_{j_0+1}(t) \qquad \text{para todo} \quad t \in I_{j_0}$$

Así que x_{j_0+1} extiende x_{j_0} al intervalo $I_{j_0+1} \supset I_{j_0}$. De esta manera, por recurrencia, si tenemos extendida en forma única la solución al problema 1.14 al intervalo I_j, $j > j_0$ entonces la podemos extender en forma única al intervalo $I_{j+1} = [a + \frac{1}{j+1}, \quad b - \frac{1}{j+1}]$, usando como antes los lemas anteriores. Así el problema 1.14 tiene definida una solución, $x_j(t)$, en cada intervalo I_j, $j \geq j_0$, y tal que $x_j(t) = x_{j+1}(t)$, para todo $t \in I_j$.

Sea $t \in (a, b)$, vamos a asignar a este t un único vector $x(t)$. Para $t \in (a, b)$ sea $l \in \mathbb{N}$, $l \geq j_0$, tal que $t \in I_l = [a + \frac{1}{l}, b - \frac{1}{l}]$ y donde suponemos que l es el mínimo de los j tales que $t \in I_j = [a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}]$.

Definimos entonces $x(t) = x_l(t)$, donde x_l es la solución del problema (1.14) definida en I_l. Notando que $x_j(t) = x_l(t) = x(t)$, para todo $j \geq l$, vemos que para cada $t \in (a, b)$ podemos asignar un único vector $x(t)$. Definimos de esta forma una función $x : (a, b) \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1}$ que por construccción satisface el problema (1.14), para cada $t \in (a, b)$. Además por Lema 1 esta solución es única.

- Si ahora $I = [a, b)$ o $I = (a, b]$ tomamos respectivamente $I = \cup_{j\geq j_0}[a, b - \frac{1}{j}]$ o $I = \cup_{j\geq j_0}[a + \frac{1}{j}, b]$, y procedemos similarmente al caso anterior.

-Finalmente, si por ejemplo, $I = [a, \infty)$, tomamos una sucesión de conjuntos $\{I_j\}$ de la forma $I_j = [a, b + j]$, $j \in \mathbb{N}$. Se tiene $I = \cup_{j=j_0}^{\infty} I_j$ donde como antes j_0 es tal que $t_0 \in I_{j_0}$, para todo $j \geq j_0$, y procedemos igual que antes para extender la solución a todo I.

Ya que en todos los casos la extensión de la solución es única se termina la demostración del teorema.

$\square$

Nos encaminamos a continuación a estudiar varias propiedades de la ecuación homogenea

$$x' = A(t)x, \tag{1.15}$$

que van a juegar un papel fundamental en demostrar que el conjunto de sus soluciones tiene una estructura de espacio vectorial con dimensión finita. Como siempre suponemos que la función A esta definida en un intervalo I donde es continua.

Lema 3 (Principio de superposición)**.** *Si $x^i(t)$, $i = 1, \cdots, k$, son k soluciones de (1.15) entonces $x(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i x^i(t)$, es tambien solución.*

Demostración. Se tiene

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i (x^i)'(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i A(t) x^i(t) = A(t) \sum_{i=1}^{k} c_i x^i(t) = A(t)x(t).$$

□

De este lema se tiene en particular que si $x(t)$ es una solución de (1.15) entonces $cx(t)$ también lo es, para cualquier constante c.

Definición 1. *Decimos que las funciones $x^i : I \to \mathbb{M}^{n\times 1}$, $i = 1, \cdots, k$, son linealmente dependientes en I si existen constantes c_i, $i = 1, \cdots, k$ no toda nulas tal que:*

$$c_1 x^1(t) + \cdots + c_k x^k(t) = 0, \quad \textit{para todo} \;\; t \in I.$$

Si el conjunto no es linealmente dependientes entonces decimos que es linealmente independientes esto es la expresión

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x^i(t) = 0, \quad \textit{para todo} \;\; t \in I$$

implica que $c_i = 0, i = 1, \cdots, k$.

Definición 2. *El wronskiano $W(x^1, \cdots, x^n)(t)$ de las n funciones $x^i : I \to \mathbb{M}^{n\times 1}$, $i = 1, \cdots, n$, es el siguiente determinante.*

$$W(x^1, \cdots, x^n)(t) = \det[x^1(t) \cdots x^i(t) \cdots x^n(t)] = \det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

donde

$$x^i(t) = \begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ \vdots \\ x_{ni}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I.$$

Lema 4. *Sean $x^i(t)$, $i = 1, \cdots, n$, n soluciones del sistema (1.15) definidas en el intervalo I. Estas soluciones son linealmente independientes, si y solo si, el wronskiano*

$$W(x^1, \cdots, x^n)(t) \neq 0,$$

para todo $t \in I$.

Demostración. Mostremos primero que si $x^i(t)$, $i = 1, \cdots, n$, son n soluciones del sistema (1.15) tales que $W(x^1, \cdots, x^n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ entonces estas soluciones son linealmente independientes en I. En efecto si ellas fueran linealmente dependientes existirian constantes $c_1, \cdots, c_n$ no todas cero tal que $\sum_{i=1}^{k} c_i x^i(t) = 0$, para todo $t \in I$. En particular, en $t_0 \in I$ fijo, se tiene $\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t_0) = 0$, que se escribe en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0.$$

Como el determinante de los coeficientes es $W(x^1, \cdots, x^n)(t_0) \neq 0$, entonces este sistema tiene la única solución $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$, que es una contradicción. Así las solución son linealmente independientes.

Ahora vamos a suponer que las n soluciones $\{x^1, \cdots, x^n\}$ son linealmente independientes en I y queremos probar que $W(x^1, \cdots, x^n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Equivalentemente vamos a probar que si $W(x^1, \cdots, x^n)(t_0) = 0$, algún $t_0 \in I$, entonces $\{x^1, \cdots, x^n\}$ son linealmente dependientes en I.

Se tiene que $W(x^1, \cdots, x^n)(t_0) = 0$ implica que existen constantes $c_1, \cdots, c_n$ no todas nulas tales que

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0.$$

Definamos

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t),$$

entonces z es solución del sistema (1.15) que en $t = t_0$ satisface

$$z(t_0) = \begin{bmatrix} z_1(t_0) \\ \vdots \\ z_n(t_0) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t_0) = \begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0.$$

Esto implica que z es solución del problema

$$z' = A(t)z, \quad z(t_0) = 0.$$

Del Teorema 1 se tiene entonces que $z(t) = 0$, para todo $t \in I$. Es decir $\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t_0) = 0$, donde no todas las constantes son nulas, por lo que las solución son linealmente dependientes en I, que es lo que queríamos probar. $\square$

Notemos que en realidad hemos probado lo siguiente. Sean $x^1, \cdots, x^n$ n soluciones de la ecuación (1.15). Se tiene que $W(x^1, \cdots, x^n)(t_0) \neq 0$, $t_0 \in I$, implica que la soluciónes $\{x^1, \cdots, x^n\}$ son linealmente independientes en I. Si ahora $W(x^1, \cdots, x^n)(t_0) = 0$, $t_0 \in I$, entonces $\{x^1, \cdots, x^n\}$ son linealmente dependientes en I.

Lema 5. *Sean $\{x^1, \cdots, x^n\}$ n soluciones linealmente independientes de (1.15). Sea*

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$$

otra solución cualquiera de esta ecuación, entonces existen constantes $c_1, \cdots, c_n$, tal que

$$z(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) \qquad i=1,\cdots,n.$$

Demostración. Para $t_0 \in I$, formemos el sistema algebraico

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t_0) \\ \vdots \\ z_n(t_0). \end{bmatrix}$$

Como el determinante de los coeficientes es distinto de 0 (soluciones son linealmente independientes) se tiene que existe una única solución de este sistema que llamamos $[c_1 \cdots c_n]^t$. Formemos ahora

$$G(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) \qquad t \in I,$$

entonces $G(t)$ es solución de (1.15) tal que en t_0 satisface

$$G(t_0)=\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t_0)=\begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t_0) \\ \vdots \\ z_n(t_0) \end{bmatrix} = z(t_0).$$

Por el Teorema 1, de existencia y unicidad, se debe tener que

$$z(t)=G(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t), \qquad \text{para todo} \;\; t \in I.$$

□

Lema 6. *La ecuación homogenea (1.15) tiene un conjunto de n soluciones que son linealmente independientes en I.*

Demostración. Basta considerar el problema

$$(P_i) \qquad \begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = [0 \cdots 1 \cdots 0]^t, \end{cases}$$

donde el 1 va en la posición i, $i = 1, \cdots, n$, y $t_0 \in I$.

Por el Teorema 1 se tiene que (P_i) posee una única solución que llamaremos $x^i(t)$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Además

$$\det[x^1(t_0), \cdots, x^n(t_0)] = \quad \det \begin{bmatrix} x_{11}(t_0) & \cdots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \cdots & x_{nn}(t_0) \end{bmatrix} = \det I = 1,$$

por lo que $\{x^1, \cdots, x^n\}$ es un conjunto de n soluciones que son linealmente independientes. $\square$

Tenemos el siguiente

Teorema 2. *Sea S el conjunto de todas las funciones $x : I \to \mathbb{M}^{n\times 1}$ que son solución de la ecuación (1.15), esto es:*

$$S = \{x : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times 1} \mid \quad x'(t) - A(t)x(t) = 0, \quad \textit{para todo} \;\; t \in I\}.$$

Entonces S es un espacio vectorial real de dimension finita igual a n.

Demostración 1. Del Lema 3, se tiene que si x, z son dos soluciones de (1.15) y α, β son escalares reales, entonces $\alpha x + \beta z$, es también solución de (1.15). De aquí que S es un espacio vectorial real. Además de los Lemas 5 y 6 se tiene que $\dim S = n$.

Definición 3. *Una base de soluciones del espacio vectorial S de soluciones de la ecuación (1.15) está formada por cualquier conjunto de soluciones linealmente independientes (en I) de esta ecuación.*

Dada una base de soluciones de la ecuación homogenea

$$x' = A(t)x$$

una solución cualquiera x se expresa según esta base por una expresión de la forma

$$x(t) = c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t),$$

donde c_i, $i = 1, \cdots, n$ son constantes. Esta expresión la vamos a llamar la solución general de la ecuación.

Escribiendo
$$x^j(t) = \left[x_{1j}(t) \cdots x_{nj}(t)\right]^t, \quad j = 1, \cdots, n,$$
y denotando por
$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$
la expresión anterior se se puede escribir como
$$x(t) = X(t)c,$$
donde
$$x(t) = \left[x_1(t) \cdots x_n(t)\right]^t \quad \text{y} \quad c = \left[c_1 \cdots c_n\right]^t.$$
Una matriz $X(t)$ cuyas columnas son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogenea, se llama una matriz fundamental.

Estudiemos ahora como encontrar la solución general de la ecuación no homogenea

$$x' = A(t)x + f(t). \tag{1.16}$$

Sea $x(t)$ una solución cualquiera de esta ecuación y supongamos que por algún método conocemos una solución particular $x_p(t)$ de esta ecuación. Se tiene

$$x' - x_p' = A(t)x(t) + f(t) - A(t)x_p(t) - f(t) = A(t)(x(t) - x_p(t)).$$

Entonces si $x_h(t) = x(t) - x_p(t)$ se tiene que

$$x_h' = A(t)x_h(t).$$

Por lo tanto si $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es una base de soluciones de la ecuación homogenea asociada, podemos escribir

$$x_h(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t).$$

Así

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) + x_p(t).$$

Consideremos ahora el problema de encontrar una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación no-homogenea (1.16). Suponemos que conocemos una base de soluciones $\{x^1, \cdots, x^n\}$ de la ecuación homogenea asociada $x' = A(t)x$. Para esto consideramos

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) x^i(t), \tag{1.17}$$

que viene de la expresión de la solución $x_h(t)$ donde reemplazamos las constantes por funciones $c_i : I \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$. Para determinar estas funciones substituimos esta expresión en la ecuación no-homogenea. Se obtiene,

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) x^i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) (x^i)'(t)$$

y por lo tanto

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) x^i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) A(t) x^i(t).$$

Reemplazando en la ecuación no-homogenea $x' = A(t)x + f(t)$, se obtiene

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) x^i(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) A(t) x^i(t)$$
$$= A(t)x(t) + f(t) = A(t) \sum_{i=1}^{n} c_i(t) x^i(t)) + f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) A(t) x^i(t) + f(t),$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) x^i(t) = f(t).$$

Poniendo

$$x^j(t) = \left[x_{1j}(t) \cdots x_{nj}(t)\right]^t, \quad j = 1, \cdots, n, \quad f(t) = \left[f_1(t) \cdots f_n(t)\right]^t,$$

el ultimo sistema se puede escribir equivalentemente como

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

de donde, aplicando la regla de Cramer, obtenemos

$$c_i'(t) = \frac{\det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & f_1(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & f_n(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}}{W(x_1, \cdots, x_n)(t)}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

note que $f(t)$ reemplaza la columna i en el numerador. Integrando se determinan estas funciones c_i que reemplazadas en (1.17) nos da la solución particular buscada.

En términos de matrices fundamentales, para buscar la solución particular de (1.16) procedemos de la manera siguiente. La solución general de la ecuación homogénea $x' = A(t)x$ se puede escribir como

$$x_h(t) = X(t)c,$$

donde $X(t)$ es una matriz fundamental y c un vector arbitrario en $\mathbb{M}^n$. Ponemos entonces

$$x(t) = X(t)c(t),$$

y lo reemplazamos en (1.16). Se obtiene

$$x'(t) = X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = A(t)X(t)c(t) + f(t).$$

y como $X(t)$ es una matriz fundamental, se tiene

$$X(t)c'(t) = f(t).$$

de donde

$$c'(t) = X(t)^{-1} f(t).$$

Integrando entre $\tau \in I$ y $t \in I$,

$$c(t) = c(\tau) + \int_\tau^t X(s)^{-1} f(s) ds,$$

por lo que la solución general de (1.16) queda como

$$x(t) = X(t)c(\tau) + X(t) \int_\tau^t X(s)^{-1} f(s) ds.$$

La solución $x_p(t) = X(t) \int_\tau^t X(s)^{-1} f(s) ds$ la llamamos la solución particular de la ecuación La fórmula anterior se puede escribir también como

$$x(t) = X(t)c(\tau) + \int_\tau^t G(t,s) f(s) ds,$$

donde $G(t,s) = X(t)X(s)^{-1}$. Notamos que $G(s,s) = I$.

Estas fórmulas son particularmente útil cuando la matriz A es de constantes, como veremos más adelante. En este caso vamos tomar como matriz fundamental $X(t) = e^{tA}$. Con esto la solución particular se escribe

$$x_p(t) = X(t) \int_\tau^t X(s)^{-1} f(s) ds = e^{tA} \int_\tau^t e^{-sA} f(s) ds = \int_\tau^t e^{(t-s)A} f(s) ds,$$

que nos dice que para calcular la solución particular tenemos que conocer la matriz exponencial y evaluarla en $(t - s)$.

1.3. Matriz exponencial. Comencemos con una definición. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de matrices $n \times n$ de números complejos, los números reales los miramos como números complejos con parte imaginaria cero. El espacio vectorial de las matrices $n \times n$ lo denotaremos por $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$.

Consideremos la serie asociada

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l = A_1 + A_2 + \cdots$$

Diremos que esta serie es convergente si la sucesión de sus sumas parciales $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $S_k = \sum_{l=1}^{k} A_l$, es convergente. Así si $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$ entonces ponemos

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_l = S,$$

y S lo llamamos la suma de la serie. Si el termino general de la serie se escribe $A_l = [a_{ij}]_{n\times n}$ entonces es fácil ver que la serie converge si y solo si cada termino a_{ij} es convergente.

Sea ahora A una matriz $n \times n$ de numeros complejos y consideremos la serie

$$I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^l}{l!} + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!}. \tag{1.18}$$

Proposición 1. *La serie* $\sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{A^l}{l!}$ *es convergente.*

Demostración 2. Tenemos que probar que la sucesión $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $S_k = \sum_{l=0}^{k} \dfrac{A^l}{l!}$, es convergente. Para esto miramos a $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$ como un espacio normado completo, donde para $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$ tomamos la norma $||A|| = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{1/2}$. Se tiene, para $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$

$$||S_p - S_q|| \leq \sum_{l=q+1}^{p} \frac{||A^l||}{l!} \leq \sum_{l=q+1}^{p} \frac{||A||^l}{l!}.$$

En vista de esto consideramos la serie

$$e^{||A||} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{||A||^l}{l!}.$$

Como esta serie es convergente se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p, q \in \mathbb{N}$, $p > n_0$, $q > n_0$ $(p > q)$, se tiene

$$\sum_{l=q+1}^{p} \frac{||A||^l}{l!} < \varepsilon.$$

Pero entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p, q \in \mathbb{N}$, $p > n_0$, $q > n_0$ $(p > q)$, se tiene

$$||S_p - S_q|| < \varepsilon,$$

que dice que la sucesión $\{S_k\}$, es de Cauchy en $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$ y por lo tanto convergente. De aqui que la serie en (1.18) sea convergente.

Es costumbre llamar a este limite la exponencial de A y se escribe

$$e^A = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^l}{l!} + \cdots \tag{1.19}$$

La matriz exponencial conserva algunas de las propiedades de la función exponencial (más adelante). En particular $e^0 = I$, $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ para $s, t \in \mathbb{R}$. De aqui $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ (tome $t = 1, s = -1$).

Por otro lado de lo que hemos probado notamos que se tiene lo siguiente

Proposición 2.

$$||e^A|| \leq e^{||A||}.$$

Demostración 3. En efecto

$$||e^A|| = ||\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!}|| = \lim_{j\to\infty} ||\sum_{l=0}^{j} \frac{A^l}{l!}|| \leq \lim_{j\to\infty} \sum_{l=0}^{j} \frac{||A||^l}{l!} = e^{||A||}.$$

Nos encaminamos ahora a considerar como la matriz exponencial esta relacionada con el problema

$$x' = Ax,$$

donde $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$. Para esta matriz A sea $t \in \mathbb{R}$ y formemos e^{tA}. Definimos así una función de los reales en $\mathbb{M}^{n\times n}$. Se tiene

Proposición 3. *La función e^{tA} es diferenciable (por lo tanto continua) para cada $t \in \mathbb{R}$, y se tiene*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Demostración 4. Por definición $\frac{d}{dt}e^{tA} = \lim_{s\to 0} \frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s}$. Se tiene

$$\frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} = e^{tA}\frac{(e^{sA} - I)}{s}$$

Ahora

$$e^{sA} - I = \frac{sA}{1!} + \frac{s^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{s^lA^l}{l!} + \cdots = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{s^lA^l}{l!},$$

por lo que

$$\frac{(e^{sA} - I)}{s} - A = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{s^{l-1}A^l}{l!},$$

y por lo tanto

$$||\frac{(e^{sA} - I)}{s} - A|| \leq |s| \sum_{l=2}^{\infty} \frac{|s|^{l-2}||A||^l}{l!} \leq |s| \sum_{l=2}^{\infty} \frac{||A||^l}{l!},$$

si $0 < |s| \leq 1$, lo cual asumimos sin pérdida de generalidad. Pero entonces

$$||\frac{(e^{sA} - I)}{s} - A|| \leq |s|e^{||A||},$$

de donde $\lim_{s\to 0} ||\frac{(e^{sA} - I)}{s} - A|| = 0$. Se tiene entonces

$$||\frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} - e^{tA}A|| = ||e^{tA}(\frac{e^{sA} - I}{s} - A)||$$
$$\leq ||e^{tA}||\,||(\frac{e^{sA} - I}{s} - A)|| \leq |s|e^{||A||}||e^{tA}||,$$

que finalmente implica

$$\lim_{s\to 0} ||\frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} - e^{tA}A|| = 0.$$

Hemos probado entonces que $\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}A$, en forma enteramente similar se demuestra que $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

Teorema 3. *La solución de la ecuación diferencial vectorial con condición inicial*

$$x' = Ax \quad x(t_0) = c,$$

es

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}c.$$

Demostración 5. Es claro que $x(t_0) = e^{0A}c = c$ y derivando

$$x'(t) = Ae^{(t-t_0)A}c = Ax(t),$$

que termina la demostración

De esta forma vemos que por medio de la matriz exponencial podemos escribir la solución general de la ecuación diferencial. En efecto escribamos la matriz $e^{(t-t_0)A} = [x^1(t), \cdots, x^n(t)]$. Entonces $x^i(t) = e^{(t-t_0)A}c^i$, con $c^i = [0, \cdots, 1, \cdots, 0]^t$ y donde el uno va en la posición i, $i = 1, \cdots, n$. Se tiene entonces que cada vector columna $x^i(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x' = Ax$, y las soluciones $\{x^1, \cdots, x^n\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ (en $t = t_0$ el Wronskiano correspondiente es 1). Si ahora $c = [c_1, \cdots, c_n]^t$, entonces se tiene

$$e^{(t-t_0)A}c = c_1x^1(t) + \cdots + c_nx^n(t),$$

que es la forma de la solución general.

Si $t_0 = 0$, la solución de la ecuación diferencial vectorial con condición inicial

$$x' = Ax \quad x(0) = c,$$

es dada por

$$x(t) = e^{tA}c = c_1x^1(t) + \cdots + c_nx^n(t).$$

Para una matriz general A puede ser dificil calcular su exponencial por medio de la serie que la define. Vamos ver entonces algunos métodos para evaluar la matriz exponencial.

Un primer caso donde esta exponencial es simple de evaluar es cuando $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ es diagonal, en efecto si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^2 \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad A^j = \begin{bmatrix} a_{11}^j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^j \end{bmatrix},$$

de donde aplicando (1.19) es inmediato ver que

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}t} \end{bmatrix}.$$

De aquí que en este caso la solución de

$$x' = Ax \quad x(0) = c,$$

es dada por $x_i(t) = c_i e^{a_{ii}t}, i = 1, \cdots, n$, donde $x(t) = [x_1(t), \cdots, x_n(t)]^t$ y $c = [c_1, \cdots, c_n]^t$.

El caso siguiente en dificultad es cuando $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ es diagonalizable. Nosotros vimos anteriormente el caso cuando A tiene n tiene n valores propios reales y distintos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, con correspondientes vectores propios $K^1, \cdots, K^n$.

Vimos que en este caso la solución de

$$x' = Ax$$

se puede escribir como

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t)$$

donde $x^1(t), \cdots, x^n(t)$ son las n soluciones linealmente independientes dadas por $x^i(t) = e^{\lambda_i t} K^i, i = 1, \cdots, n$, y c_i, $i = 1, \cdots, n$ son constantes arbitrarias.

Vamos a generalizar ahora esta situación al caso cuando $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ cuando es diagonalizable. De Algebra Lineal se tiene

Teorema 4. *Una matriz A $n \times n$ de números reales (o complejos) es similar sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) a una matriz diagonal si y solo si A tiene n vectores propios linealmente independientes en $\mathbb{M}^{n\times n}$ (respectivamente en $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$). En este caso la matriz $\Lambda = \mathcal{K}^{-1} A \mathcal{K}$ es diagonal donde $\mathcal{K}$ es la matriz cuyas columnas están formadas por los n vectores propios de A.*

Teorema 5. *Sea $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable sobre sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) y sea $\Lambda = \mathcal{K}^{-1} A \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}$ y Λ tienen el mismo significado que en el teorema anterior. Entonces*

$$e^A = e^{\mathcal{K}\Lambda\mathcal{K}^{-1}} = \mathcal{K} e^{\Lambda} \mathcal{K}^{-1},$$

Demostración 6. Como $A = \mathcal{K}\Lambda\mathcal{K}^{-1}$, se sigue que $A^2 = \mathcal{K}\Lambda^2\mathcal{K}^{-1}$ y que $A^l = \mathcal{K}\Lambda^l\mathcal{K}^{-1}$, $l \in \mathbb{N}$. Entonces de (1.19), se tiene

$$e^A = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathcal{K}\Lambda^l\mathcal{K}^{-1}}{l!} = \mathcal{K} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Lambda^l}{l!} \mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K} e^{\Lambda} \mathcal{K}^{-1}. \blacksquare$$

Para esta matriz A diagonalizable consideremos ahora el correspondiente problema

$$x' = Ax \quad x(0) = c.$$

Llamemos λ_i, $i = 1, \cdots, n$ los valores propios (no necesariamente distintos) y K^i los correspondientes vectores propios. Entonces $\mathcal{K} = [K^1 \cdots K^n]$ y

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Se tiene

$$e^{tA} = \mathcal{K} e^{t\Lambda} \mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathcal{K}^{-1}$$

y por lo tanto la solución del problema es

$$x(t) = e^{tA} c = \mathcal{K} e^{t\Lambda} \mathcal{K}^{-1} c = \mathcal{K} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathcal{K}^{-1} c.$$

Notemos de aquí que si ponemos $d = \mathcal{K}^{-1} c$, se tiene

$$x(t) = \mathcal{K} e^{t\Lambda} d = [K^1 \cdots K^n] e^{t\Lambda} d = [K^1 \cdots K^n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} d,$$

y si $d = [d_1, \cdots, d_n]^t$, la solución se puede escribir como

$$x(t) = [K^1 \cdots K^n] \begin{bmatrix} d_1 e^{\lambda_1 t} \\ d_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ d_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = d_1 K^1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + d_n K^n e^{\lambda_n t}.$$

de donde

$$x(t) = d_1 K^1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + d_n K^n e^{\lambda_n t},$$

que es la forma de la solución general que obtuvimos antes.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial $x' = Ax$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

En primer lugar estudiamos sus valores propios y resolvemos $\det(A - \lambda I) = 0$. Usando Maple se obtiene:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{con multiplicidad dos},$$

con correspondientes vectores propios

$$K^1 = [1,1,1]^t, \quad K^2 = [1,1,0]^t, \quad K^3 = [1,0,1]^t,$$

donde K^1 corresponde a λ_1 y K^2, K^3 a λ_2. Como estos vectores propios son linealmente independientes la matriz A es diagonalizable. Podemos entonces escribir inmediatamente la solución general como

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + d_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + d_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} d_1 e^t + d_2 e^{2t} + d_3 e^{2t} \\ d_1 e^t + d_2 e^{2t} \\ d_1 e^t + d_3 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Evaluemos ahora la exponencial e^{tA}. Usamos la fórmula

$$e^{tA} = \mathcal{K} e^{t\Lambda} \mathcal{K}^{-1}.$$

Se tiene

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

y por lo tanto

$$e^{t\Lambda} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

También

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando Maple

$$\mathcal{K}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

y

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t & e^t - e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^t \end{bmatrix},$$

y la solución es

$$x(t) = e^{tA}c.$$

Estudiemos ahora el caso en hay valores propios complejos. Más específicamente supongamos que queremos resolver

$$x' = Ax, \tag{1.20}$$

donde la matriz constante A $n \times n$ tiene componentes reales. Suponemos que A tiene valores propios reales y valores propios complejos (conjugados). Notamos primero

Proposición 4. *Si $w(t)$ es una solución compleja de (1.20) entonces la función vectorial compleja conjugada $\overline{w_j(t)}$ es también solución.*

Demostración 7. Se tiene que w satisface

$$w'(t) = Aw(t),$$

y como $\overline{w'(t)} = \overline{w(t)}'$ se tiene que

$$\overline{w(t)}' = A\overline{w(t)},$$

que implica el resultado ■

El siguiente es un resultado importante.

Teorema 6. *Sea A una matriz real $n \times n$ y supongamos que*

$$[x_1(t), \cdots, x_p(t), w_1(t), \overline{w_1(t)}, \cdots, w_q(t), \overline{w_q(t)}], \tag{1.21}$$

es una base de soluciones compleja de (1.20), donde $p + 2q = n$, y donde $x_j(t)$, $j = 1, \cdots, p$. son vectores soluciones reales y $w_j(t)$, $\overline{w_j(t)}$, $j = 1, \cdots, q$, son vectores soluciones complejas conjugadas.

Si $w_j(t) = u_j(t) + iv_j(t)$, donde $u_j(t), v_j(t)$ denotan la parte real e imaginaria de $w_j(t)$, $j = 1, \cdots, q$, entonces

$$[x_1(t), \cdots, x_p(t), u_1(t), v_1(t), \cdots, u_q(t), v_q(t)] \tag{1.22}$$

es una base real de soluciones para (1.20).

Demostración 8. Se tiene que

$$u_j(t) = \frac{w_j(t) + \overline{w_j(t)}}{2}, \qquad v_j(t) = \frac{w_j(t) - \overline{w_j(t)}}{2i},$$

por lo que u_j y v_j son soluciones reales de la ecuación. Lo que resta es probar que las soluciones de (1.22) son L.I. Para esto usamos que las soluciones de (1.21) son L. I. Razonamos se la siguiente manera, formamos

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \cdots + a_px_p(t) + b_1u_1(t) + c_1v_1(t)$$

$$+ \cdots + b_qu_q(t) + c_qv_q(t) = 0, \tag{1.23}$$

donde $a_1, \cdots, a_p$, $b_1, \cdots, b_q$, y $c_1, \cdots, c_q$, son constantes reales. Definamos

$$\beta_j = \frac{b_j - ic_j}{2}, \quad \gamma_j = \frac{b_j + ic_j}{2}, \quad j = 1, \cdots, q,$$

entonces

$$b_ju_j(t) + c_jv_j(t) = (\beta_j + \gamma_j)u_j - i(\gamma_j - \beta_j)v_j$$

$$= \beta_j(u_j(t) + iv_j(t)) + \gamma_j(u_j(t) - iv_j(t)) = \beta_jw_j(t) + \gamma_j\overline{w_j(t)}.$$

Reemplazando en (1.23),

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \cdots + a_px_p(t) + \beta_1w_1(t) + \gamma_1\overline{w_1(t)} + \cdots + \beta_qw_q(t) + \gamma_q\overline{w_q(t)} = 0,$$

que implica $a_j = 0$, $j = 1, \cdots, p$, y $\beta_j = \gamma_j = 0$, $j = 1, \cdots, q$. Como esto también implica $b_j = c_j = 0$, $j = 1, \cdots, q$, se termina la demostración ■

Ejercicio. Haga todos los detalles de cálculo.

En lo que sigue vamos a necesitar el siguiente resultado.

Proposición 5. *Sean A y B dos matrices reales o complejas $n \times n$, tal que $AB = BA$. Entonces*

(i) $Be^{tA} = e^{tA}B$,

(ii) $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$.

Demostración 9. (i) Se tiene que

$$Be^{tA} = B\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{BA^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^lB}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^l}{l!}B = e^{tA}B.$$

(ii) Usamos el Teorema de existencia y unicidad. Definamos las dos funciones

$$u(t) = e^{t(A+B)}c \qquad v(t) = e^{tA}e^{tB}c,$$

donde c es un vector arbitrario pero fijo. Es inmediato ver que u y v satisfacen el problema con condición inicial

$$z' = (A+B)z, \qquad z(0) = c.$$

Por el Teorema de existencia y unicidad (admitido valido para el caso en que las matrices sean complejas, es elemental extenderlo!) se debe tener entonces que

$$(e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB})c = 0,$$

para todo vector c. Se sigue que (ii) es cierto. ■

Vamos a comenzar a considerar el problema (1.20) cuando la matriz A no es diagonalizable. Será conveniente mirar la matriz real A como en $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n\times n}$.

Recordemos primero algunos resultados de Algebra Lineal, sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ los valores propios distintos de A. Entonces para cada $i = 1, \cdots, s$

$$Ker(A - \lambda_i I), Ker(A - \lambda_i I)^2, \cdots,$$

forman una cadena creciente de subespacios de $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n}$. Más aun existe un entero positivo p_i, el índice correspondiente a λ_i, tal que

$$Ker(A - \lambda_i I) \subset Ker(A - \lambda_i I)^2 \subset \cdots$$

$$\subset Ker(A - \lambda_i I)^{p_i} = Ker(A - \lambda_i I)^{p_i+1} = Ker(A - \lambda_i I)^{p_i+2} = \cdots$$

Es costumbre poner

$$M_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i I)^{p_i},$$

el cual se llama el subespacio propio generalizado de λ_i. De Algebra Lineal se tiene el siguiente resultado importante

$$\mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n} = M_{\lambda_1} \oplus M_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus M_{\lambda_s}.$$

De esta forma si $c \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}^{n}$ entonces

$$c = \sum_{i=1}^{s} c^i \quad \text{donde} \quad c^i \in M_{\lambda_i}, \tag{1.24}$$

y entonces

$$e^{tA}c = \sum_{i=1}^{s} e^{tA}c^i,$$

y por lo tanto solo tenemos que calcular $e^{tA}c^i$, $i = 1, \cdots, s$. Eliminando por conveniencia de notación los subindices evaluemos $e^{tA}c$ donde suponemos $c \in M_\lambda$, λ valor propio de A. Se tiene

$$e^{tA}c = e^{t(A-\lambda I)+t\lambda I}c = e^{t(A-\lambda I)}e^{t\lambda I}c = e^{t\lambda I}e^{t(A-\lambda I)}c = e^{t\lambda}e^{t(A-\lambda I)}c.$$

Ahora

$$e^{t(A-\lambda I)}c = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l(A-\lambda I)^l}{l!}c = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{t^l(A-\lambda I)^l}{l!}c,$$

donde p es índice de λ, por lo que se cumple

$$Ker(A-\lambda I) \subset Ker(A-\lambda I)^2 \subset \cdots$$

$$\subset Ker(A-\lambda I)^p = Ker(A-\lambda I)^{p+1} = Ker(A-\lambda_i I)^{p+2} = \cdots .$$

La serie se vuelve una sumatoria finita porque $c \in M_\lambda = Ker(A-\lambda I)^p$, lo cual implica

$$0 = (A-\lambda I)^p c = (A-\lambda I)^{p+1} c = \cdots = (A-\lambda_i I)^j c,$$

para todo $j \geq p$. De estos resultados se tiene

$$e^{tA}c = e^{t\lambda}e^{t(A-\lambda I)}c = e^{t\lambda} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{t^l(A-\lambda I)^l}{l!}c$$

$$= e^{t\lambda}(I + \frac{t(A-\lambda I)}{1!} + \frac{t^2(A-\lambda I)^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{p-1}(A-\lambda I)^{p-1}}{(p-1)!})c.$$

Hemos entonces demostrado el siguiente teorema.

Teorema 7. *Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ los valores propios distintos de una matriz A, $n \times n$, $M_{\lambda_1}, \cdots, M_{\lambda_s}$ los correspondientes espacios propios generalizados y $p_1, \cdots, p_s$ los respectivos indices.*

Entonces la solución del problema con condición inicial

$$x' = Ax, \quad x(0) = c,$$

es dada por

$$x(t) = \sum_{i=1}^{s} e^{t\lambda_i} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j(A-\lambda_i I)^j}{j!}c^i, \tag{1.25}$$

donde $c^i \in M_{\lambda_i}$ son determinados por la descomposición de c dada en (1.24).

Un resultado importante de Algebra Lineal dice que $\dim M_{\lambda_i} = m_i$ donde m_i es la multiplicidad de λ_i en el polinomio característico de A.

El siguiente ejemplo ilustra el uso del teorema.

Ejemplo. Consideremos el siguiente problema. Encuentre la solución del problema $x' = Ax$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Ver ejercicios con Maple.

Vamos ahora a estudiar mas en detalle la aplicación de la fórmula (1.25). Supongamos que tenemos dada una matriz A $n \times n$ que tiene s valores propios $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ con multiplicidades $m_1, \cdots, m_s$ (en el polinomio característico). Para aplicar la fórmula (1.25) vemos que tenemos que conocer los indices p_i así como una base de M_{λ_i}, $i = 1, \cdots, s$. Una forma de hacer esto, que lo vamos a explicar para el caso del valor propio λ_i, es la siguiente.

Comenzamos determinando una base para $Ker(A - \lambda_i I)$. Supongamos que $\dim Ker(A - \lambda_i I) = q_1^i$. Entonces A tiene q_1^i vectores propios. Si $q_1^i = m_i$ estamos listo, ya que en este caso $M_{\lambda_i} = Ker(A - \lambda_i I)$. Si $q_1^i < m_i$, entonces $Ker(A - \lambda_i I) \subset M_{\lambda_i}$ con contención estricta y por lo tanto tenemos que completar la base de M_{λ_i}.

Estudiamos entonces $Ker(A - \lambda_i I)^2$ y hecho esto supongamos que $\dim Ker(A - \lambda_i I)^2 = q_2^i$. Notamos aquí que los vectores de la base de $Ker(A - \lambda_i)$ que hemos determinado son también parte de $Ker(A - \lambda_i I)^2$. Así que para determinar la base de este ultimo espacio hay que determinar solamente $q_2^i - q_1^i$ vectores linealmente independientes adicionales.

Continuando de esta forma tenemos que encontrar una base para $Ker(A - \lambda_i I)^j$. Supongamos que hemos encontrado que la dimensión de este espacio es q_j^i. Como antes para la determinación de la correspondiente base solo necesitamos determinar $q_j^i - q_{j-1}^i$ vectores linealmente independientes adicionales , por la misma razón anterior. Encontrados estos vectores, se tiene que en este paso conocemos q_j^i vectores linealmente independientes que son elementos de $Ker(A - \lambda_i)^{p_i}$, y que por lo tanto son todos vectores propios generalizados.

El proceso termina cuando $q_j^i = m_i$. De esta forma se ha determinado la base de M_{λ_i} y al mismo tiempo el índice p_i, ya que $p_i = j$.

Como se genera entonces la base correspondiente de soluciones de la ecuación diferencial?

Supongamos que $c = \sum_{m=1}^{s} c^m$ con $c^m \in M_{\lambda_m}$ es tal que $c = h_1^l \in Ker(A - \lambda_i I)$, $l = 1, \cdots, q_1^i$. Entonces $c^m = 0$, $m \neq i$ and $c^i = h_1^l$. Reemplazando en (1.25) se obtienen las siguientes soluciones

$$x_1^l(t) = \sum_{m=1}^{s} e^{t\lambda_m} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j (A - \lambda_m I)^j}{j!} c^m$$

$$= e^{t\lambda_i} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j (A - \lambda_i I)^j}{j!} h_1^l = h_1^l e^{t\lambda_i}, \qquad l = 1, \cdots, q_1^i.$$

Sean ahora $c = h_2^l \in Ker(A - \lambda_i)^2$, $l = q_1^i + 1, \cdots, q_2^i$, los vectores propios generalizados linealmente independientes adicionales que no son vectores propios. Reemplazando en (1.25), se obtiene

$$x_2^l(t) = \sum_{m=1}^{s} e^{t\lambda_m} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j (A - \lambda_m I)^j}{j!} c^m = e^{t\lambda_i} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j (A - \lambda_i I)^j}{j!} h_2^l$$

$$= e^{t\lambda_i} (I + \frac{t(A - \lambda_i I)}{1!}) h_2^l, \qquad l = q_1^i + 1, \cdots, q_2^i.$$

Seguimos de esta forma hasta que llegamos al paso k donde $q_k^i = m_i$, con lo que $k = p_i$ y nos falta por determinar $m_i - q_{k-1}^i$ soluciones. Sean entonces $h_k^l \in Ker(A - \lambda_i)^k$, $l = q_{k-1}^i + 1, \cdots, q_k^i$, los vectores propios generalizados linealmente independientes que no están en $Ker(A - \lambda_i)^{k-1}$. Reemplazando en (1.25), se obtienen las soluciones faltantes siguientes

$$x_k^l(t) = \sum_{i=1}^{s} e^{t\lambda_i} \sum_{j=0}^{p_i-1} \frac{t^j (A - \lambda_i I)^j}{j!} h_k^l = e^{t\lambda_i} (I + \frac{t(A - \lambda_i I)}{1!} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{t^{p_i-1} (A - \lambda_i I)^{p_i-1}}{(p_i - 1)!}) h_k^l, \qquad l = q_{k-1}^i + 1, \cdots, q_k^i.$$

Ejercicio. Demuestre que todas estas soluciones encontradas son linealmente independientes.

Hagamos algunos problemas.

Ejemplo 1. Queremos estudiar el caso en que la matriz A, 3×3 tiene valores propios reales $\lambda_1 = \lambda_2$ y λ_3, pero asociados a $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ hay un solo vector propio.

En este caso tenemos inmediatamente las dos soluciones linealmente independientes dadas por $x^1(t) = K^1 e^{\lambda_1 t}$ y $x^3(t) = K^3 e^{\lambda_3 t}$ donde K^1 y K^3 son vectores propios correspondientes a λ_1 y a λ_3, respectivamente.

Para completar la base de soluciones, que sabemos tiene dimensión 3, razonamos como antes. Tenemos que estudiar $M_{\lambda_1} = Ker(A - \lambda_1 I)^2$ que sabemos que tiene dimensión 2. Sabemos también que $K^1 \in Ker(A - \lambda_1 I) \subset Ker(A - \lambda_1 I)^2$. Asi que nos falta un vector $P \in Ker(A - \lambda_1 I)^2$ que sea linealmente independiente con K^1, que por lo demás sabemos que existe.

Formemos entonces

$$(A - \lambda_1 I)^2 P = 0.$$

Pongamos

$$V = (A - \lambda_1 I)P,$$

entonces

$$(A - \lambda_1 I)V = (A - \lambda_1 I)^2 P = 0,$$

con lo que V es un vector propio y por lo tanto $V = CK^1$. Asi P satisface

$$(A - \lambda_1 I)P = CK^1.$$

Claramente podemos tomar $C = 1$ redefiniendo P. Se tiene

$$(A - \lambda_1 I)P = K^1.$$

Esta ultima ecuación la miramos entonces como una ecuación para P. Conocido este P la correspondiente solución será

$$x^2(t) = e^{t\lambda_1}(I + \frac{t(A - \lambda_i I)}{1!})P = e^{t\lambda_1}P + e^{t\lambda_1}t(A - \lambda_i I)P = e^{t\lambda_1}P + te^{t\lambda_1}K^1.$$

Se tiene entonces que la solución general de la ecuación es

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + c_3 x^3(t) = c_1 K^1 e^{\lambda_1 t} + c_2(e^{t\lambda_1}P + te^{t\lambda_1}K^1) + c_3 K^3 e^{\lambda_3 t},$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes arbitrarias.

En algunos libros y basado en lo que hicimos anteriormente, para encontrar la segunda solución para λ_1 se intenta una solución de la forma:

$$x(t) = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}$$

con

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo en la ecuación $x' = Ax$, se tendrá una solución de esta forma si K y P satisfacen respectivamente

$$(A - \lambda_1 I)K = 0,$$

$$(A - \lambda_1 I)P = K.$$

Así K debe ser un vector propio (que tomamos como K^1) y P es solución de la segunda ecuación. Claramente esto conduce a lo mismo que hemos hecho antes.

Consideremos el sistema

$$x' = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} x.$$

Se tiene que $\det(A - \lambda I) = 0$, nos da los valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$. Evaluando los vectores propios correspondientes a λ_1, obtenemos que $K^1 = [1, \frac{5}{4}, \frac{-1}{2}]^t$ es un vector propio (normalizado). Mientras que para $\lambda_2 = \lambda_3$ existe un solo vector propio $K^2 = [2, 0, -1]^t$ (normalizado).

Resolviendo ahora P de la ecuación

$$(A - 5I)P = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

se obtiene que $P_2 = \frac{-1}{2}$ y $P_1 = 5P_2 - 2P_3 = \frac{-5}{2} - 2P_3$. Tomamos $P_3 = -1$ se tiene $P_1 = \frac{-1}{2}$, por lo que $P = [\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, -1]^t$.

De esta forma obtenemos la solución

$$x^3(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} te^{5t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} e^{5t}.$$

Finalmente la solución general es

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{5t} + c_3 [\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} te^{5t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} e^{5t}],$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 con constantes arbitrarias.

A continuación suponemos que en la ecuación $x' = AX$ A es una matriz real 4×4. Como siempre estudiamos primero las raices de $\det(A - \lambda I) = 0$ y vamos a considerar en cierto detalle los distintos casos posibles. En lo que sigue y hasta nuevo aviso vamos a suponer que los valores propios son reales.

CASO 1. $\det(A - \lambda I) = 0$ tiene cuatro valores propios reales y distintos $\lambda_1, \cdots, \lambda_4$. Estos dan origen respectivamente a los 4 vectores propios $K^1, \cdots, K^4$, con lo que podemos generar las 4 soluciones linealmente independientes

$$x^i = K^i e^{\lambda_i t} \qquad i = 1, \cdots, 4,$$

de donde la solución general de la ecuación es

$$x(t) = \sum_{i=1}^{4} c_i K^i e^{\lambda_i t}$$

con $c_1, \cdots, c_4$ constantes arbitrarias.

CASO 2. $\det(A - \lambda I) = 0$ tiene como valores propios (reales) $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 \neq \lambda_4$. Denotando por K^3 Y K^4 los vectores propios correspondientes respectivamente a λ_3 y λ_4, tenemos dos casos a considerar.

$(2i)$ El espacio propio correspondiente a $\lambda_1 = \lambda_2$, tiene dimensión 2, por lo que hay 2 vectores K^1, K^2 que generan este espacio propio. La solución general es entonces dada por

$$x(t) = c_1 K^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K^2 e^{\lambda_2 t} + c_3 K^3 e^{\lambda_3 t} + c_4 K^4 e^{\lambda_4 t}.$$

-$(2ii)$ El espacio propio de λ_1 tiene dimensión uno. Tenemos entonces inmediatamente las soluciones $x^1(t) = K^1 e^{\lambda_1 t}$, $x^3(t) = K^3 e^{\lambda_3 t}$ y $x^4(t) = K^4 e^{\lambda_4 t}$. Por lo que para completar la base de soluciones nos falta una solución. Pero este caso es exactamente como en el ejemplo anterior asi que sabemos que esta solución tiene la forma

$$x^2(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t},$$

donde P es una solución de la ecuación

$$(A - \lambda_1 I)P = K^1$$

Se obtiene así la solución

$$x_2(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t},$$

que completa la base de soluciones.

CASO 3. $\det(A - \lambda I) = 0$ tiene dos valores propios con multiplicidad dos, que son $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\lambda_3 = \lambda_4$ Aquí de nuevo hay subcasos.

-$(3i)$ Los espacios propios correspondientes a λ_1 y λ_3 tienen dimensión 2. En este caso hay 4 vectores linealmente independientes con lo que la solución general se construye inmediatamente.

-$(3ii)$ El espacio propio correspondiente a λ_1 es de dimensión 1 y el correspondiente a λ_3 tiene dimensión 2. En este caso conocemos 3 vectores propios : K^1 correspondiente a λ_1, K^3 y K^4 correspondiente respectivamente a $\lambda_3 = \lambda_4$. Entonces $K^1 e^{\lambda_1 t}$, $K^3 e^{\lambda_3 t}$ y $K^4 e^{\lambda_3 t}$ son tres soluciones linealmente independientes del problema. La otra solución la generamos por medio de

$$x^2(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}$$

donde P es solución de

$$(A - \lambda_1 I)P = K^1,$$

y hemos completado la base de soluciones.

-(3*iii*) Los espacios propios correspondiente a $\lambda_1 = \lambda_2$ y a $\lambda_3 = \lambda_4$ tienen dimensión 1. En este caso tenemos inmediatamente las soluciones $x^1(t) = K^1 e^{\lambda_1 t}$ y $x^3(t) = K^3 e^{\lambda_3 t}$, donde K^1 y K^3 vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_3 respectivamente, a los que agregamos, en la forma usual, las soluciones

$$\begin{aligned} x^2(t) =& K^1 t e^{\lambda_1 t} + P^1 e^{\lambda_1 t} \qquad \text{con} \qquad (A - \lambda_1 I)P^1 = K^1 \\ x^4(t) =& K^3 t e^{\lambda_3 t} + P^3 e^{\lambda_3 t} \qquad \text{con} \qquad (A - \lambda_3 I)P^3 = K^3, \end{aligned}$$

las cuales completan la base.

CASO 4. $\det(A - \lambda I) = 0$ tiene los valores propios λ_1 con multiplicidad 3 y λ_4 con multiplicidad 1. De esta manera podemos formar inmediatamente las dos soluciones $x^1(t) = K^1 e^{\lambda_1 t}$ y $x^4(t) = K^4 e^{\lambda_4 t}$, con K^1 y K^4 vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_4 respectivamente.

Para generar las otras dos soluciones consideramos distintos casos.

(4*i*) Supongamos que el espacio propio de λ_1 tiene dimensión 1, entonces tenemos que mirar por $M_{\lambda_1} = Ker(A - \lambda_1 I)^{p_1}$ donde p_1 es el indice de λ_1. Es claro que $p_1 = 2$ o 3.

Si $p_1 = 2$ entonces $\dim Ker(A - \lambda_1 I)^2 = 3$ y tal como antes los dos vectores propios generalizados que faltan se encuentran de resolver

$$(A - \lambda_1 I)P = K^1.$$

De aqui se obtienen P^1, P^2 tal que $\{K^1, P^1, P^2\}$ forman una base de $Ker(A - \lambda_1 I)^2$. Las soluciones faltantes son entonces

$$x^2(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P^1 e^{\lambda_1 t}, \quad x^3(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P^2 e^{\lambda_1 t}.$$

Si ahora $p_1 = 3$ entonces $\dim Ker(A - \lambda_1 I)^2 = 2$ y podemos encontrar una solución tal como antes resolviendo

$$(A - \lambda_1 I)P = K^1,$$

que nos va a dar un vector propio generalizado P linealmente independiente con K^1. Esto nos da una tercera solución

$$x^2(t) = K^1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}.$$

Para obtener la otra solución uno puede proceder de la siguiente forma. (Ej. Justifique rigurosamente estos pasos por la teoria desarrollada). Suponemos que la solución tiene la forma

$$x(t) = L_1 \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} + L_2 t e^{\lambda_1 t} + L_3 e^{\lambda_1 t},$$

y reemplazamos esta expresión en $x' = Ax$. Se obtiene que va a existir una solución de esta forma si los vectores L_1, L_2, y L_3 satisfacen las siguientes ecuaciones.

$$(A - \lambda_1 I)L_1 = 0,$$
$$(A - \lambda_1 I)L_2 = L_1,$$
$$(A - \lambda_1 I)L_3 = L_2.$$

Como es usual tomamos $L_1 = K^1$, $L_2 = P^1$, ya determinados en el paso previo, y resolvemos la tercera ecuación para L_3 Sea $L_3 = Q$, la solución. De esta forma la solución faltante queda entonces

$$x^3(t) = K^1 \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} + P^1 t e^{\lambda_1 t} + Q e^{\lambda_1 t}.$$

(ii) Dimensión del $\text{Ker}(A - \lambda_1 I) = 2$. En este caso hay otro vector propio K^2 linealmente independiente con K^1, y que da origen a la solución $x^2(t) = K^2 e^{\lambda_2 t}$. Notamos que en este caso se debe tener que $\dim Ker(A - \lambda_1 I)^2 = 3$. Como antes miramos por una solución de

$$(A - \lambda_1 I)^2 P = 0,$$

que sea linealmente independiente con K^1, K^2. Haciendo $V = (A - \lambda_1 I)P$, se obtiene que existen constantes reales μ_1, μ_2 tales que $V = \mu_1 K^1 + \mu_2 k^2$. Por supuesto en esta etapa μ_1, μ_2 no son conocidos, sin embargo se resuelve la ecuación

$$(A - \lambda_1 I)P = \mu_1 K^1 + \mu_2 K^2.$$

y μ_1, μ_2 se fijan tales que P, K^1, K^2 sean vectores linealmente independientes.

La solución que falta para completar la base viene dada entonces por

$$x^3(t) = (\mu_1 K^1 + \mu_2 K^2) t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}.$$

(iii) Dimensión del $Ker(A - \lambda_1 I) = 3$, entonces existen 3 vectores propios K^1, K^2, K^3. Este caso se deja al lector ya que es muy simple

CASO 5. $\det(A - \lambda I) = 0$ tiene un solo valor propio real de multiplicidad 4, por lo que una solución de la base de soluciones es dada por

$$x^1(t) = K^1 e^{\lambda_1 t},$$

donde K^1 en vector propio (normalizado) correspondiente a λ_1.

Este caso se deja de ejercicio.

Pasamos ahora a examinar algunos ejemplos donde el polinomio característico tiene valores propios complejos.

Ejemplo. Consideremos la ecuación $x' = Ax$ donde A es una matriz real 2×2 que suponemos tiene dos valores propios complejos conjugados $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$.

Para λ_1 evaluamos su correspondiente vector propio K a partir de

$$(A - \lambda_1 I)K = 0.$$

Como la matriz A es real se tiene que $\overline{K}$, vector complejo conjugado de K, es un vector propio correspondiente a $\overline{\lambda}_1 = \lambda_2$. Note que K y $\overline{K}$, son dos vectores linealmente independientes para los escalares complejos. Pongamos $K = K^1 + iK^2$ donde K^1 y K^2 son respectivamente la parte real e imaginaria de K, de aquí $\overline{K} = K^1 - iK^2$. Correspondiente a λ_1 y λ_2 tenemos respectivamente las soluciones

$$w^1(t) = e^{\lambda_1 t}K \qquad w^2(t) = e^{\lambda_2 t}\overline{K} = \overline{w^1(t)},$$

esto es son dos soluciones complejas conjugadas. Entonces por Teorema 6 se tiene que la base real de soluciones está formada por la parte real e imaginaria de $w^1(t)$, que procedemos a evaluar. Se tiene

$$\begin{aligned} w^1(t) &= e^{\alpha t}(K^1 + iK^2)(\cos\beta t + i\sin\beta t), \\ &= e^{\alpha t}[K^1\cos\beta t - K^2\sin\beta t)] + ie^{\alpha t}[K^1\sin\beta t + K^2\cos\beta t]. \end{aligned}$$

Así

$$x^1(t) = e^{\alpha t}[K^1\cos\beta t - K^2\sin\beta t] \tag{1.26}$$

y

$$x^2(t) = e^{\alpha t}[K^1\sin\beta t + K^2\cos\beta t]. \tag{1.27}$$

La solución general de la ecuación diferencial es entonces

$x(t) = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) = c_1e^{\alpha t}[K^1\cos\beta t - K^2\sin\beta t] + c_2e^{\alpha t}[K^1\sin\beta t + K^2\cos\beta t]$,

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Vamos a considerar ahora el problema de la ecuación $x' = Ax$ donde A es una matriz real 4×4 que tiene cuatro valores propios complejos (con parte imaginaria no nula) λ_1, λ_2, λ_3, y λ_4, donde notamos que necesariamente debemos tener (excepto por notación de los valores propios) que $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$ y $\lambda_3 = \overline{\lambda}_4$.

Los casos a consider se reducen a solo dos: (i) cuando $\lambda_1 \neq \lambda_3$, y (ii) cuando $\lambda_1 = \lambda_3$.

En el caso (i) tendremos 4 valores propios complejos que escribimos como $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $\lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1$, $\lambda_3 = \alpha_3 + i\beta_3$ y $\lambda_4 = \alpha_3 - i\beta_3$.

Asociado con λ_1 tenemos el vector propio H^1, con λ_2 el vector propio $H^2 = \overline{H^1}$, con λ_3 el vector propio H^3, y con λ_4 el vector propio $H^4 = \overline{H^3}$.

Las correspondientes soluciones (complejas) son $w^1(t) = H^1 e^{\lambda_1 t}$, $w^2(t) = H^2 e^{\lambda_2 t} = \overline{H^1} e^{\overline{\lambda_1} t} = \overline{w^1(t)}$, $w^3(t) = H^3 e^{\lambda_3 t}$, y $w^4(t) = \overline{H^3} e^{\overline{\lambda_3} t} = \overline{w^3(t)}$.

Escribamos $H^1 = K^1 + iK^2$ y $H^3 = K^3 + iK^4$, donde K^1 y K^2 son la parte real e imaginaria respectivamente de H^1 y K^3, K^4 son la parte real e imaginaria respectivamente de H^3.

Como antes para calcular la base de soluciones tenemos que calcular la parte real e imaginaria de $w^1(t)$ y $w^3(t)$. Estas quedan dadas respectivamente por

$$x^1(t) = \frac{w^1(t) + \overline{w^1(t)}}{2}, \qquad x^2(t) = \frac{w^1(t) - \overline{w^1(t)}}{2i},$$

y

$$x^3(t) = \frac{w^3(t) + \overline{w^3(t)}}{2}, \qquad x^4(t) = \frac{w^3(t) - \overline{w^3(t)}}{2i}.$$

Se tiene que la solución general es

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + c_3 x^3(t) + c_4 x^4(t),$$

donde c_1, c_2 c_3 y c_4 son constantes reales arbitrarias.

Consideremos finalmente el caso (ii). Suponemos entonces que $\lambda_1 = \lambda_3$ por lo que $\lambda_2 = \lambda_4$. De esta forma λ_1 y λ_2 son valores propios complejos conjugados con multiplicidad dos.

Hay que considerar dos casos: (a) $\text{dim}Ker(A - \lambda_1 I) = 1$ y por lo tanto $\text{dimKer}(A - \lambda_2 I) = 1$ y (b) $\text{dimKer}(A - \lambda_1 I) = 2$ y por lo tanto $\text{dimKer}(A - \lambda_2 I) = 2$.

En el caso (b) hay dos vectores propios asociados con $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, que escribimos como $H^1 = K^1 + iK^2$ y $H^2 = K^3 + iK^4$. De aquí que asociados con $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, tengamos los vectores propios $\overline{H^1} = K^1 - iK^2$ y $\overline{H^2} = K^3 - iK^4$.

Correspondiendo a λ_1 y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ tenemos respectivamente las soluciones

$$w^1(t) = H^1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad w^2(t) = \overline{H^1} e^{\overline{\lambda_1} t},$$

y

$$w^3(t) = H^2 e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad w^4(t) = \overline{H^2} e^{\overline{\lambda_1} t}.$$

Como antes, tomando parte real e imaginaria de $w^1(t)$ y $w^3(t)$, obtenemos la base de soluciones formada por las siguientes cuatro soluciones reales

$$x^1(t) = [(\cos \beta t)K^1 - (\sin \beta t)K^2]e^{\alpha t},$$
$$x^2(t) = [(\sin \beta t)K^1 + (\cos \beta t)K^2]e^{\alpha t},$$
$$x^3(t) = [(\cos \beta t)K^3 - (\sin \beta t)K^4]e^{\alpha t},$$
$$x^4(t) = [(\sin \beta t)K^3 + (\cos \beta t)K^4]e^{\alpha t}.$$

Ejercicio. Demuestre directamente que estas cuatro soluciones son linealmente independientes.

Consideremos finalmente el caso (a) donde tenemos que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ son valores propios de multiplicidad dos y correspondientes a cada uno de ellos hay un solo vector propio asociado. Si como siempre $H^1 = K^1 + iK^2$ y $H^2 = \overline{H^1} = K^1 - iK^2$ denotan respectivamente estos vectores propios, entonces las funciones $w^1(t) = H^1 e^{\lambda_1 t}$ y $w^2(t) = H^2 e^{\lambda_2 t} = \overline{H^1} e^{\overline{\lambda_1} t}$ son soluciones complejas de $x' = Ax$. Estas soluciones complejas dan origen, en la forma acostumbrada, a las dos soluciones reales, parte de la base de soluciones:

$$x^1(t) = (K^1 \cos \beta t - K^2 \sin \beta t)e^{\alpha t}$$

y

$$x^2(t) = (K^1 \sin \beta t + K^2 \cos \beta t)e^{\alpha t}.$$

Continuamos evaluando el resto de las soluciones complejas. Para esto tenemos que encontrar un vector propio generalizado que sea linealmente independiente con H^1 y que este en $Ker(A - \lambda_1 I)^2$. Tal como en el caso de valores propios reales, esto se puede hacer suponiendo la solución faltante tiene la forma

$$w^2(t) = H^1 t e^{\lambda_1 t} + P e^{\lambda_1 t}.$$

Reemplazando en $x' = Ax$ tendremos una solución de esta forma si P es una solución de la ecuación

$$(A - \lambda_1 I)P = H^1,$$

que esta vez nos da un vector complejo. Poniendo $P = P^1 + iP^2$ se tiene que las soluciones compleja faltantes son

$$w^3(t) = (K^1 + iK^2)te^{\lambda_1 t} + (P^1 + iP^2)e^{\lambda_1 t}$$

y

$$w^4(t) = (K^1 - iK^2)te^{\overline{\lambda_1}t} + (P^1 - iP^2)e^{\overline{\lambda_1}t} = \overline{w^3(t)}.$$

Razonando como antes, es decir tomamos la parte real e imaginaria de $w^3(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned} w^3(t) =&(K^1 + iK^2)(\cos\beta t + i\sin\beta t)te^{\alpha t} + (P^1 + iP^2)(\cos\beta t + i\sin\beta t)e^{\alpha t} \\ =&(K^1\cos\beta t - K^2\sin\beta t)te^{\alpha t} + (P^1\cos\beta t - P^2\sin\beta t)e^{\alpha t} \\ &+ i(K^1\sin\beta t + K^2\cos\beta t)te^{\alpha t} + i(P^1\sin\beta t + P^2\cos\beta t)e^{\alpha t} \end{aligned}$$

de donde las soluciones reales faltantes son

$$x^3(t) = (K^1\cos\beta t - K^2\sin\beta t)te^{\alpha t} + (P^1\cos\beta t - P^2\sin\beta t)e^{\alpha t}$$

y

$$x^4(t) = (K^1\sin\beta t + K^2\cos\beta t)te^{\alpha t} + (P^1\sin\beta t + P^2\cos\beta t)e^{\alpha t}.$$

Finalmente la solución general es dada por

$$x(t) = \sum_{i=1}^{4} c_1 x^i(t),$$

donde $c_1, \cdots, c_4$ son constantes reales arbitrarias.

A continuación queremos estudiar lo siguiente. Conocida una base de solución de

$$x' = Ax \tag{1.28}$$

se quiere encontrar la matriz exponencial correspondiente.

Sea $\{x^1, \cdots, x^n\}$ esta base. Entonces toda solución de (1.28) se escribe como

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t).$$

En particular si y^l es la solución de (1.28) correspondiente a la condición inicial $d^l = [0\cdots 1\cdots 0]^t$, $l = 1, \cdots, n$, donde el uno va en la posición l, van a existir constantes c_i^l, $i = 1, \cdots, n$, tal que

$$y^l(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^l x^i(t).$$

Para cada $l = 1, \cdots, n$, usando la condición inicial, podemos formar un sistema de ecuación algebraicas para determinar las constantes c_i^l, $i = 1, \cdots, n$. Este es

$$y^l(0) = d^l = \sum_{i=1}^{n} c_i^l x^i(0). \tag{1.29}$$

Si n es pequeño es mejor calcular las constantes directamente, sino se puede usar por ejemplo Maple. De esta forma conocemos las soluciones y^l, $l = 1, \cdots, n$.

Vamos probar que la matriz

$$Y(t) = [y^1(t) \cdots y^n(t)]$$

es la matriz exponencial. Se tiene

$$Y'(t) = [(y^1)'(t) \cdots (y^n)'(t)] = [Ay^1(t) \cdots Ay^n(t)]$$

$$= A[y^1(t) \cdots y^n(t)] = AY(t).$$

Así Y satisface una ecuación diferencial matricial, con la condición inicial $Y(0) = [d^1 \cdots d^n] = I$, y por lo tanto es solución del problema

$$X' = AX, \qquad X(0) = I. \tag{1.30}$$

donde para cada $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ es una matriz $n \times n$. Por otro si podemos demostrar que la matriz exponenciales es solución de este mismo problema, entonces por el teorema de unicidad de soluciones generalizado a ecuación diferenciales matriciales, vamos a tener que $e^{tA} = Y(t)$.

Pero hemos demostrado que $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ y $e^{0A} = I$ por lo que es claro que e^{tA} es solución de (1.30). Esto nos da un método para calcular la matriz exponencial. Nos falta extender el teorema de existencia y unicidad a ecuación diferenciales matriciales.

Se tiene

Teorema 8. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean $A : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times n}$ y $F : I \mapsto \mathbb{M}^{n\times n}$ dos funciones continuas. El problema diferencial matricial*

$$(CI_m) \qquad \begin{cases} X' = A(t)X + F(t) \\ X(t_0) = C, \quad t_0 \in I, \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo I.

Demostración 10. Es consecuencia directa del teorema similar para ecuaciones diferenciales vectoriales. En efecto poniendo

$$X(t) = [x^1(t) \cdots x^n(t)] \qquad F(t) = [f^1(t) \cdots f^n(t)]$$

el problema (CI_m) se puede escribir como

$$X'(t) = [(x^1)'(t) \cdots (x^n)'(t)] = A(t)[x^1(t) \cdots x^n(t)] + [f^1(t) \cdots f^n(t)]$$

$$= [A(t)x^1(t) + f^1(t) \cdots A(t)x^n(t) + f^n(t)],$$

$$X(t_0) = [x^1(t_0) \cdots x^n(t_0)] = C = [c^1(t) \cdots c^n(t)],$$

donde c^l, $l = 1, \cdots, n$ son las columnas de la matriz C. Es claro entonces que el problema (CI_m) es equivalente a las n ecuaciones diferenciales vectoriales con condición inicial

$$(x^l(t))' = A(t)x^l(t) + f^l(t), \qquad x^l(t_0) = c^l, \qquad l = 1, \cdots, n. \tag{1.31}$$

Por el teorema usual de existencia y unicidad, para cada $l = 1, \cdots, n$, el problema (1.31) tiene una única solución definida en I lo que implica obviamente la existencia y unicidad para el sistema (CI_m).

Vamos a aprovechar de dar una definición. Consideremos nuevamente la ecuación diferencial vectorial.

$$x' = A(t)x$$

y formemos la ecuación matricial asociada

$$X' = A(t)X. \tag{1.32}$$

Entonces toda solución de esta ultima ecuación cuyas columnas sean soluciones linealmente independientes la vamos a llamar una matriz fundamental. Para esto basta que $X(t)$ sea una solución con una condición inicial $X(t_0) = C$ donde C es una matriz de constantes reales $n\times n$ con sus columnas linealmente independientes. La razón es la siguiente. Sean como antes $d^l = [0,\cdots,1,\cdots,0]^t$, $l=1,\cdots,n$, donde el uno va en la posición l, los elementos de la base canónica y formemos $x^l(t)) = X(t)d^l$, que forman las columnas de $X(t)$. Se tiene que

$$(x^l)'(t)) = X'(t)d^l = A(t)X(t)d^l = A(t)x^l(t), \qquad x^l(0) = X(0)d^l = c^l,$$

donde c^l, $l=1,\cdots,n$ son las columnas de C que las hemos supuesto linealmente independientes Entonces x^l, $l=1,\cdots,n$, forman un conjunto de soluciones de $x' = A(t)x$ que son linealmente independientes. De aquí encontrar una matriz fundamental es equivalente a encontrar n soluciones linealmente independientes de $x' = A(t)x$. Si $X(t)$ es una matriz fundamental de $x' = Ax$ entonces la solución general se escribe

$$x(t) = X(t)c,$$

donde c es un vector columna arbitrario, $c = [c_1\cdots c_n]^t$.

Sigamos un poco con matrices fundamentales. Sea $X(t)$ una matriz fundamental de la ecuación (1.32) tal que $X(\tau) = I$. Entonces $Y(t) = X(t)Y(\tau)$ es una solución de (1.32) que es una matriz fundamental si $Y(\tau)$ es una matriz no singular. Derivando $Y'(t) = X'(t)Y(\tau) = AX(t)Y(\tau) = AY(t)$, por lo que es solución. Ahora $X(\tau)Y(\tau) = IY(\tau) = Y(\tau)$, por lo que si esta matriz es no singular entonces $Y(t)$ es una matriz fundamental.

Ejercicios adicionales.

Ejercicio. Sea $X(t)$ una matriz fundamental de (1.32) y sea $W(t) = \det X(t) = \det[x^1(t)\cdots x^n(t)]$. Demuestre que

$$\det X(t) = e^{\int_\tau^t \operatorname{tr} A(s)ds} \det X(\tau)$$

para todo $t,\tau\in\mathbb{R}$.

Solución. Sea $\tau\in I$ arbitrario, que mantenemos fijo al comienzo. Sea $Y(t) = X(t)X^{-1}(\tau)$. Entonces

$$Y'(t) = X'(t)X^{-1}(\tau) = A(t)X(t)X^{-1}(\tau) = A(t)Y(t) \qquad \text{con} \quad Y(\tau) = I.$$

Se tiene

$$W(t) = W(\tau)\det(Y(t)).$$

Derivando
$$W'(t) = W(\tau) \sum_{i=1} \det[y^1(t) \cdots (y^i)'(t) \cdots y^n(t)].$$

Como $y^i(\tau) = d^i$, $(d^1, \cdots, d^n)$, representa la base canónica, entonces $(y^i)'(\tau) = A(\tau)d^i$. Así

$$W'(\tau) = W(\tau) \sum_{i=1}^{n} \det[y^1(\tau) \cdots (y^i)'(\tau) \cdots y^n(\tau)]$$
$$= W(\tau) \sum_{i=1}^{n} \det[d^1 \cdots A(\tau)d^i \cdots d^n] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\tau) = W(\tau)\mathrm{tr}(A(\tau)),$$

que tomando en cuenta que τ es arbitrario, se puede escribir como
$$W'(t) = W(t)\mathrm{tr}(A(t)).$$

Integrando entre t y τ se obtiene

$$\det W(t) = e^{\int_\tau^t \mathrm{tr} A(s) ds} \det W(\tau).$$

que es lo queríamos demostrar.

En particular, si A es una matriz constante, podemos tomar e^{tA} como la matriz fundamental, se tiene

$$\det e^{tA} = e^{t\,\mathrm{tr} A} \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio. Considere la ecuación no homogénea $x' = Ax + be^{\mu t}$, donde A es una matriz real $n \times n$, b es un vector constante y μ es una constante que no es un valor propio de A. Se pide determinar la solución general.

Se tiene que la solución general se puede escribir como $x(t) = e^{tA}c + x_p(t)$, donde $x_p(t)$ denota una solución particular de la ecuación. Para determinar esta solución intentamos una solución de la forma $x_p(t) = ve^{\mu t}$, donde v es un vector que queremos determinar. Se tiene

$$x_p'(t) = \mu v e^{\mu t} = Ave^{\mu t} + be^{\mu t},$$

de donde
$$(A - \mu I)v = -b \quad \text{que implica} \quad v = -(A - \mu I)^{-1}b,$$

y la solución general es entonces $x(t) = e^{tA}c - e^{\mu t}(A - \mu I)^{-1}b$.

Ejercicio. Supongamos que la matriz A, $n \times n$, tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix},$$

donde los J_i $i = 1, \cdots, k$ son bloques. Se pide demostrar que

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{tJ_k} \end{bmatrix}.$$

Vamos a dar una demostración distinta a la común , pero interesante. Sea

$$H(t) = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{tJ_k} \end{bmatrix},$$

y queremos probar que $H(t) = e^{tA}$. Para esto derivamos $H(t)$, nos da

$$H'(t) = \begin{bmatrix} J_1 e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 e^{tJ_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k e^{tJ_k} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{tJ_k} \end{bmatrix} = AH(t).$$

Además $H(0) = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_k \end{bmatrix} = I$. Así por el teorema de unicidad para ecuaciones matriciales debemos tener que efectivamente $H(t) = e^{tA}$.

Pasemos a estudiar sistemas lineales planos, corresponden a $n = 2$, y tienen la forma:

$$x' = Ax, \tag{1.33}$$

con A una matriz real dada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Vamos a suponer que $\det A \neq 0$, lo que nos dice que la única solución de la ecuación $Ax = 0$, es $x = 0$. Esto implica que la solución trivial es la única solución constante de la ecuación y que $\lambda = 0$ no es un valor propio de A.

Por otro lado esto también implica la consecuencia importante que ninguna otra solución de la ecuación puede pasar por el origen en M^2, porque si por ejemplo $x(t)$ es una solución que satisface $x(t_0) = 0$ y $x(t_1) \neq 0$, algún $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ entonces la parte de unicidad del Teorema de Existencia y Unicidad nos dice que $x(t)$ debe ser la solución trivial y por lo tanto $x(t_1) = 0$ lo que no puede ser.

Más generalmente si escribimos $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^t$ y dibujamos la curva correspondiente (t es el parámetro de la curva), en el plano (x_1, x_2), llamado plano de fase, afirmamos que dos soluciones distinta no se pueden intersectar transversalmente en el plano de fase. La razón de esto es la misma que antes y se basa en una aplicación de la parte de unicidad del Teorema de Existencia y Unicidad. El argumento es sin embargo un poco más sutil y se basa en la siguiente propiedad. Sea $x(t)$ una solución que satisface $x(t_0) = c$ algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y sea $y(t)$ una solución que satisface $y(t_1) = c$ algún $t_1 \in \mathbb{R}$. Definamos $z(t) = y(t + (t_1 - t_0))$. Entonces es claro que z es también solución de (1.33). Además $z(t_0) = y(t_0 + (t_1 - t_0)) = y(t_1) = c = x(t_0)$, entonces el Teorema de Existencia y Unicidad nos dice que $x(t) = z(t) = y(t + \Delta)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, con $\Delta = t_1 - t_0$. Es claro entonces que en el plano de fase, cuando t va de $-\infty$ a $+\infty$, tanto $x(t)$ como $y(t)$ nos van a dar los mismos puntos, porque son dos parametrizaciones distintas (si $\Delta \neq 0$) de la misma curva. Las curvas solución en el plano de fase la vamos a llamar trayectorias.

Si ahora se tiene que $x(t)$ e $y(t)$ son dos soluciones de (1.33) cuyas trayectorias se intersectan en el plano de fase, esto es existen $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_0) = y(t_1)$ entonces el argumento de arriba nos dice que en el plano de fase estas soluciones representan dos parametrizaciones distintas de la misma curva, por lo que no puede haber intersección transversal de estas soluciones en el plano de fase.

Los puntos que satisfacen $Ax = 0$ los vamos a llamar puntos críticos. Recordando que la ecuación $Ax = 0$ (con $\det A \neq 0$) tiene como única solución el punto $(0, 0)$, se tiene que el origen es el único punto crítico en caso que estamos considerando.

Vamos a decir que el origen (punto crítico) es estable si todas las soluciones de la ecuación son acotadas; asintóticamente estable si todas las soluciones tienden al origen cuando $t \to \infty$; inestable si hay la menos una solución que no es acotada. Esta definición depende del intervalo donde estudiemos las soluciones , por ejemplo una trayectoria positiva es definida para $t \in [0, \infty)$, una negativa para $t \in (-\infty, 0]$, etc.

Notemos también que las trayectorias se mueven en el plano de fase en lugares geométricos que quedan definidas por la ecuación

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2},$$

o

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}.$$

La pendiente de la recta tangente a la trayectoria en el punto $(x_1(t), x_2(t))$ esta dada por $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}}$. En cada punto de la trayectoria vamos a asociar una dirección (flecha) por medio del vector $(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt})$, que nos va a indicar como se mueve la solución a lo largo de la trayectoria cuando t crece.

El polinomio característico de la matriz A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A.$$

donde $\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22}$. Los valores propios son dados por

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A + \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A - \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}).$$

Tendremos distintos cases dependiendo si (1) $(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A > 0$, (2) $(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A < 0$ y si (3) $(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A = 0$. En el caso (ii) vamos a tener valores propios complejos.

Caso (1). En este caso λ_1 y λ_2 son valores propios reales y distintos. Sean respectivamente K^1 y K^2 los vectores propios correspondientes, que sabemos forman una base en $\mathbb{M}^2$. La solución general queda dada por

$$x(t) = c_1 K^1 e^{t\lambda_1} + c_2 K^2 e^{t\lambda_2}.$$

Formemos, como antes, la matriz $\mathcal{K} = [K^1, K^2]$. Sabemos que poniendo $x(t) = \mathcal{K}y(t)$, entonces se tiene

$$x'(t) = \mathcal{K}y'(t) = Ax(t) = A\mathcal{K}y(t),$$

de donde

$$y'(t) = \Lambda y(t),$$

con

$$\Lambda = (\mathcal{K})^{-1} A\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

ya que

$$A\mathcal{K} = [AK^1, AK^2] = [\lambda_1 K^1, \lambda_2 K^2] = \mathcal{K} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Así si $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^t$ se obtiene el sistema en forma canónica

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t). \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$y_1(t) = c_1 e^{t\lambda_1}, \quad y_2(t) = c_2 e^{t\lambda_2},$$

donde $c_1 = y_1(0), c_2 = y_2(0)$, son constantes arbitrarias.

Queremos ahora dibujar las curvas soluciones en el plano de fase (y_1, y_2). Hay tres casos: (i) los valores propios son negativos, (ii) los valores propios son positivos, (iii) un valor propio es positivo y el otro es negativo. En el caso (i) el punto critico se llama nodo estable; en el caso (ii) el punto critico se llama nodo inestable y en el caso (ii) el punto critico se llama punto silla.

Para $y_1(0) \neq 0$ y $y_2(0) \neq 0$ las trayectorias describen el lugar geométrico

$$|\frac{y_1}{y_1(0)}|^{\lambda_2} = |\frac{y_2}{y_2(0)}|^{\lambda_1}. \tag{1.34}$$

Si $y_1(0) = 0$, las trayectorias se mueven en el eje y_2 mientras que si $y_2(0) = 0$, las trayectorias se mueven en el eje y_1.

En los casos (i) y (ii), para $y_1(0) \neq 0$ y $y_2(0) \neq 0$ podemos despejar como y_2 como

$$|y_2| = |y_2(0)||\frac{y_1}{y_1(0)}|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \tag{1.35}$$

así que las trayectorias están sobre lugares geométricos en forma de parábolas que tienden al origen en caso (i) o se alejan del origen en caso (ii) cuando t tiende a infinito. En el primer caso decimos que el nodo es estable y en el segundo que es inestable.

Ir a ejemplos plano-de-fase1.mw y plano-de-fase2.mw .

En el caso (iii), para para $y_1(0) \neq 0$ y $y_2(0) \neq 0$ podemos despejar como y_2 como

$$|y_2| = |y_2(0)||\frac{y_1(0)}{y_1}|^{|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|}, \tag{1.36}$$

las trayectorias están sobre lugares geométricos en forma de hipérbolas. El punto critico $(0, 0)$ es inestable.

Caso (2). En este caso los valores propios son complejos conjugados, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Si $H^1 = K^1 + iK^2$ es el vector propio correspondiente a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, entonces sabemos que una base soluciones esta dada por

$$x^1(t) = (K^1 \cos\beta t - K^2 \sin\beta t)e^{\alpha t}$$

y

$$x^2(t) = (K^1 \sin\beta t + K^2 \cos\beta t)e^{\alpha t},$$

con lo que la solución general queda

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^t = c_1x^1(t) + c_2x^2(t),$$

donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Recordemos a continuación que para encontrar la forma canónica de A se procede como sigue. De

$$A(K^1 + iK^2) = (\alpha + i\beta)(K^1 + iK^2),$$

se tiene que

$$AK^1 + iAK^2 = (\alpha K^1 - \beta K^2) + i(\beta K^1 + \alpha K^2),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} AK^1 &= \alpha K^1 - \beta K^2 \\ AK^2 &= \beta K^1 + \alpha K^2. \end{aligned}$$

De aquí la matriz Λ que representa a A según la base $\{K^1, K^2\}$, es

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Notemos que

$$[AK^1, AK^2] = [\alpha K^1 - \beta K^2, \beta K^1 + \alpha K^2],$$

que poniendo $\mathcal{K} = [K^1, K^2]$ se puede escribir como

$$A\mathcal{K} = \mathcal{K} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \mathcal{K}\Lambda,$$

y despejando

$$\Lambda = \mathcal{K}^{-1} A\mathcal{K}.$$

Hagamos el cambio de variable $x = \mathcal{K}y$ con lo que

$$x' = \mathcal{K}y' = A\mathcal{K}y.$$

Se tiene

$$y' = \mathcal{K}^{-1} A\mathcal{K}y = \Lambda y,$$

equivalente si $y = [y_1, y_2]^t$,

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

que es la forma canónica del sistema inicial, cuando A tiene valores propios complejos. Sabemos que la solución de este sistema es dada por

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{t\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = e^{t\alpha} \begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix}.$$

Equivalentemente

$$y_1(t) = e^{t\alpha}(\cos\beta t\, y_1(0) + \sin\beta t\, y_2(0))$$

$$y_2(t) = e^{t\alpha}(-\sin\beta t\, y_1(0) + \cos\beta t\, y_2(0)).$$

De aquí

$$\sqrt{y_1(t)^2 + y_2(t)^2} = e^{t\alpha}\sqrt{(y_1(0)^2 + y_2(0)^2)}.$$

Entonces si $\alpha > 0$ las trayectorias tienden en forma espiral a ∞ cuando $t \to \infty$, decimos en este caso que el origen es un foco inestable, mientras que si $\alpha < 0$ las trayectorias tienden en forma espiral a 0 cuando $t \to \infty$, y en este caso decimos que el origen es un foco estable. Si $\alpha = 0$ las trayectorias se mueven en círculos, cuyo radio queda fijado por las condiciones iniciales. En este caso decimos que el origen es estable.

Caso 3. Se deja de ejercicio el encontrar las formas canónicas de los distintos casos así como hacer un esquema de sus respectivos planos de fase.