

1. Considere la ecuación diferencial:

$$y' + ay = bu(t) \quad y(0) = 0.$$

donde $a > 0$, $b > 0$ son números reales dados. La función $u(t)$ está definida por:

$$u(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 2 & \text{si } \tau < t \leq 2\tau \\ 1 & \text{si } 2\tau < t \leq 3\tau \\ f(t) & \text{si } 3\tau < t \end{cases}$$

donde τ es un número positivo dado.

Encuentre y grafique una función $y(t)$ que satisfice la ecuación diferencial en los intervalos $[0, \tau]$, $(\tau, 2\tau]$, $(2\tau, 3\tau]$, $(3\tau, \infty)$ y que es continua en $[0, \infty)$ para los siguientes casos:

a) $f(t) = 0$.

b) $f(t) = \cos(t)$.

Solución:

En el intervalo $[0, \tau]$ se cumple:

$$y' + ay = 3b \quad \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-at} + \frac{3b}{a}$$

Al aplicar la condición inicial $y(0) = 0$ resulta $c_1 = -\frac{3b}{a}$ y entonces:

$$y(t) = \frac{3b}{a}(1 - e^{-at}), \quad t \in [0, \tau]$$

En el intervalo $(\tau, 2\tau]$ se cumple:

$$y' + ay = 2b \quad \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-at} + \frac{2b}{a}$$

Al aplicar la condición de continuidad en τ , $y(\tau) = \frac{3b}{a}(1 - e^{-a\tau})$ resulta $c_2 = \frac{b}{a}(e^{a\tau} - 3)$ y entonces:

$$y(t) = \frac{b}{a}(e^{a\tau} - 3)e^{-at} + \frac{2b}{a}, \quad t \in (\tau, 2\tau]$$

En el intervalo $(2\tau, 3\tau]$ se cumple:

$$y' + ay = b \Rightarrow y(t) = c_3 e^{-at} + \frac{b}{a}$$

Al aplicar la condición de continuidad en 2τ , $y(2\tau) = \frac{b}{a}(e^{a\tau} - 3)e^{-a\tau} + \frac{2b}{a}$ resulta $c_3 = \frac{b}{a}(e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)$ y entonces:

$$y(t) = \frac{b}{a}(e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)e^{-at} + \frac{b}{a}, \quad t \in (2\tau, 3\tau]$$

En el intervalo $(3\tau, \infty)$ se cumple:

$$y' + ay = f(t)$$

Analizando el primer caso $f(t) = 0$

$$y' + ay = 0 \Rightarrow y(t) = c_{41} e^{-at}$$

Al aplicar la condición de continuidad en 3τ , $y(3\tau) = \frac{b}{a}(e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)e^{-3a\tau} + \frac{b}{a}$ resulta $c_{41} = \frac{b}{a}(e^{3a\tau} + e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)$ y entonces:

$$y(t) = \frac{b}{a}(e^{3a\tau} + e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)e^{-at}, \quad t \in (3\tau, \infty)$$

Analizando el segundo caso $f(t) = \cos(t)$

$$y' + ay = \cos(t) \Rightarrow y(t) = c_{42} e^{-at} + \frac{a}{1+a^2} \cos(t) + \frac{1}{1+a^2} \sin(t)$$

Tomando $\sin(\phi) = \frac{a}{1+a^2}$ y $\cos(\phi) = \frac{1}{1+a^2}$, la solución de la EDO en este intervalo se escribe:

$$y(t) = c_{42} e^{-at} + \sin(t + \phi)$$

Al aplicar la condición de continuidad en 3τ , $y(3\tau) = \frac{b}{a}(e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3)e^{-3a\tau} + \frac{b}{a}$ resulta $c_{42} = \frac{b}{a}(e^{3a\tau} + e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3) - e^{3a\tau} \sin(3\tau + \phi)$ y entonces:

$$y(t) = \left(\frac{b}{a}(e^{3a\tau} + e^{2a\tau} + e^{a\tau} - 3) - e^{3a\tau} \sin(3\tau + \phi)\right)e^{-at} + \sin(t + \phi), \quad t \in (3\tau, \infty)$$

En las siguientes figuras se muestran gráficos de la función $y(t)$ para cada caso de $f(t)$, tomando los valores $a = 1$, $b = 1$, $\tau = 10$.

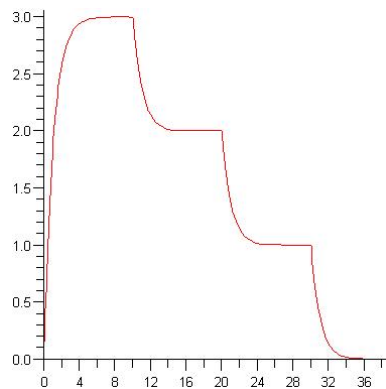


FIGURA 1

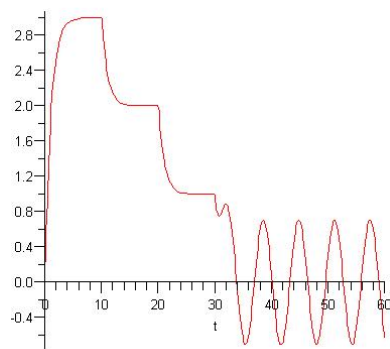


FIGURA 2

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a)

$$a(t)y'' + b(t)y' + y = c(t)^3 + e^{3c(t)} + \cos(c(t))$$

donde las funciones $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ son:

$$a(t) = (1 + t^2)^2, \quad b(t) = 2t(1 + t^2), \quad c(t) = \arctan(t).$$

(b)

$$xy' + 4y = x^4y^2. \quad y(1) = 1$$

Solución:

a) Se realiza el cambio de variable $u = \arctan(t) \Rightarrow du = \frac{1}{1+t^2} dt$. Las derivadas quedan:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dy}{du} \frac{1}{1+t^2} = \bar{y}' \frac{1}{1+t^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(\frac{dy}{du} \frac{1}{1+t^2})}{dt} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \left(\frac{d^2y}{du^2} - 2t \frac{dy}{du} \right) = \frac{1}{(1+t^2)^2} (\bar{y}'' - 2t\bar{y})$$

Al reemplazar en la EDO este cambio de variable, resulta:

$$\bar{y}'' + \bar{y} = u^3 + e^{3u} + \cos(u)$$

La solución homogénea de la EDO es:

$$\bar{y}_h(u) = c_1 \cos(u) + c_2 \sin(u)$$

Aplicando el método de coeficientes indeterminados, la forma que tiene la solución particular es:

$$\bar{y}_p(u) = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Ee^{3u} + Fu \cos(u) + Gu \sin(u)$$

Derivando:

$$\bar{y}_p(u)' = B + 2Cu + 3Du^2 + 3Ee^{3u} + F \cos(u) + G \sin(u) + u(-F \sin(u) + G \cos(u))$$

$$\bar{y}_p(u)'' = 2C + 6Du + 9Ee^{3u} - 2F \sin(u) + 2G \cos(u) + u(-F \sin(u) - G \cos(u))$$

Al reemplazar la solución particular en la EDO resulta:

$$\bar{y}_p'' + \bar{y}_p = A + 2C + (B + 6D)u + Cu^2 + Du^3 + 10Ee^{3u} - 2F \sin(u) + 2G \cos(u) = u^3 + e^{3u} + \cos(u)$$

Para que ambas funciones sean iguales, debe cumplirse que los coeficientes sean iguales:

$$C = 0, D = 1, A + 2C = 0 \Rightarrow A = 0, B + 6D = 0 \Rightarrow B = -6, 10E = 1 \Rightarrow E = \frac{1}{10}, 2G = 1 \Rightarrow G = \frac{1}{2} \text{ y } -2F = 0 \Rightarrow F = 0.$$

Entonces la solución particular es:

$$\bar{y}_p(u) = -6u + u^3 + \frac{1}{10}e^{3u} + \frac{1}{2}u \sin(u)$$

Por lo tanto la solución general es:

$$\bar{y}(u) = \bar{y}_h(u) + \bar{y}_p(u) = c_1 \cos(u) + c_2 \sin(u) - 6u + u^3 + \frac{1}{10}e^{3u} + \frac{1}{2}u \sin(u)$$

Regresando a la variable inicial t ,

$$\bar{y}(t) = c_1 \cos(\arctan(t)) + c_2 \sin(\arctan(t)) - 6 \arctan(t) + \arctan(t)^3 + \frac{1}{10}e^{3 \arctan(t)} + \frac{1}{2} \arctan(t) \sin(\arctan(t))$$

b) La EDO de primer orden es de tipo Bernoulli. Haciendo el cambio de variable $w = y^{-1}$, $w' = -y^{-2}$ resulta la EDO lineal:

$$w' - \frac{4}{x}w = -x^3$$

El factor integrante de la EDO lineal es $e^{\int -\frac{4}{x}} = e^{-4 \ln(x)} = x^{-4}$

$$\frac{d[x^{-4}w]}{dx} = -\frac{1}{x}$$

Entonces:

$$x^{-4}w = -\ln(x) + C$$

Dado que $y(1) = 1 \Rightarrow w(1) = 1$, y se tiene $C = 1$ y la solución del problema:

$$y(x) = (x^4 - x^4 \ln(x))^{-1}$$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) (3.0 puntos) $y''' - y'' + 25y' - 25y = e^t + \sin(5t)$.

b) (3.0 puntos) $t^2 y'' + (2a + 1)ty' + a^2 y = \ln(t)t^{-a}$, $t > 0$, y donde $a > 0$ es una constante dada.

Solución:

a) Se resuelve la homogénea, encontrando las raíces del polinomio característico

$$p(m) = m^3 - m^2 + 25m - 25 = m^2(m - 1) + 25(m - 1) = (m^2 + 25)(m - 1) = 0$$

Entonces la solución homogénea es:

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 \cos(5t) + c_3 \sin(5t)$$

Aplicando el método de coeficientes indeterminados, la forma de la solución particular es:

$$y_p(t) = d_1 t e^t + d_2 t \cos(5t) + d_3 t \sin(5t)$$

Reemplazado la particular en la EDO resulta:

$$y_p''' - y_p'' + 25y_p' - 25y_p = 26d_1 e^t + (-50d_2 - 10d_3) \cos(5t) + (-50d_3 + 10d_2) \sin(5t) = e^t + \sin(5t)$$

Igualando los coeficientes de las funciones (para mantener la igualdad), se obtiene la solución particular:

$$y_p(t) = \frac{1}{26} t e^t + \frac{1}{260} t \cos(5t) - \frac{1}{52} t \sin(5t)$$

Finalmente la solución general es la suma de la homogénea mas particular:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos(5t) + c_3 \sin(5t) + \frac{1}{26} t e^t + \frac{1}{260} t \cos(5t) - \frac{1}{52} t \sin(5t)$$

b) Se realiza el cambio de variable $u = \ln(t)$, $du = \frac{1}{t} dt$. Las derivadas quedan:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dy}{du} \frac{1}{t} = \bar{y}' \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d(\frac{dy}{du} \frac{1}{t})}{dt} = \frac{1}{t^2} \left(\frac{d^2 y}{du^2} - \frac{dy}{du} \right) = \frac{1}{t^2} (\bar{y}'' - \bar{y})$$

Al aplicar el cambio de variable:

$$\bar{y}'' + 2a\bar{y}' + a^2\bar{y} = u e^{-au}$$

Se resuelve la homogénea, calculando las raíces del polinomio característico:

$$p(m) = m^2 + 2am + a^2 = (m + a)^2$$

Por lo tanto la solución homogénea es:

$$\bar{y}_h(u) = c_1 e^{-au} + c_2 u e^{-au}$$

Aplicando el método de coeficientes indeterminados, la forma de la solución particular es:

$$\bar{y}_p(u) = e^{-au}(d_1u^2 + d_2u^3)$$

Al reemplazar la particular en la EDO, queda:

$$\bar{y}_p'' + 2a\bar{y}_p' + a^2\bar{y}_p = e^{-au}(2d_1 + 6d_2u) = ue^{-au}$$

y por lo tanto la solución particular es:

$$\bar{y}_p = \frac{1}{6}u^3e^{-au}$$

Finalmente la solución general es la suma de la homogénea y particular:

$$\bar{y}(u) = c_1e^{-au} + c_2ue^{-au} + \frac{1}{6}u^3e^{-au}$$

Regresando a la variable inicial t ,

$$y(t) = c_1t^{-a} + c_2\ln(t)t^{-a} + \frac{1}{6}(\ln(t))^3t^{-a}$$

4. Considere la ecuación diferencial:

$$y''' + b(t)y = \operatorname{sen}(t),$$

con las condiciones iniciales

$$y(t_0) = c_1, \quad y'(t_0) = c_2, \quad y''(t_0) = c_3.$$

La función $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ es definida y continua en un intervalo I .

Demuestre que el problema con condiciones iniciales tiene una única solución.

Solución:

Por contradicción. Supongo que existen dos soluciones al problema con condiciones iniciales y_1 y y_2 . Ambas soluciones deben satisfacer la EDO y las condiciones iniciales.

Sea la variable $z = y_1 - y_2$. Esta variable cumple con la EDO:

$$z''' + b(t)z = 0$$

y las condiciones iniciales:

$$z(t_0) = 0, \quad z'(t_0) = 0, \quad z''(t_0) = 0.$$

Escribiendo la EDO en la forma de un sistema de EDOS de primer orden:

$$z' = u, \quad u' = v, \quad v' = -b(t)z$$

Se cumple para $t \geq t_0$:

$$z(t) = \int_{t_0}^t u(s)ds, \quad u(t) = \int_{t_0}^t v(s)ds, \quad v(t) = \int_{t_0}^t -b(s)z(s)ds$$

Acotando:

$$|z(t)| \leq \int_{t_0}^t |u(s)|ds, \quad |u(t)| \leq \int_{t_0}^t |v(s)|ds, \quad |v(t)| \leq \int_{t_0}^t |-b(s)z(s)|ds \leq C \int_{t_0}^t |z(s)|ds$$

C es el máximo de la función $b(t)$.

Sea

$$r(t) = |z(t)| + |v(t)| + |u(t)|$$

Se cumple que:

$$0 \leq r(t) \leq \int_{t_0}^t |z(s)|ds + \int_{t_0}^t |v(s)|ds + \int_{t_0}^t |u(s)|ds$$

Entonces:

$$r(t) \leq C \left[\int_{t_0}^t (|u(s)| + |z(s)| + |v(s)|)ds \right] \leq C \int_{t_0}^t r(s)ds$$

Sea $\gamma(t) := \int_{t_0}^t r(s)ds$. Entonces:

$$r(t) = \gamma'(t) \leq C\gamma(t)$$

Multiplicando por e^{-Ct} , se puede escribir:

$$(\gamma(t)e^{-Ct})' \leq 0$$

Integrando entre t_0 y t :

$$\gamma(t)e^{-Ct} \leq \gamma(t_0)e^{-Ct}$$

Pero $\gamma(t_0) = 0$, entonces

$$\gamma(t) = 0 \Rightarrow r(t) = 0 \Rightarrow z(t) = y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Lo cual es una contradicción.