1. Transformada de Laplace

Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, decimos que f es continua a trozos (continua por tramos) en $[0, \infty)$, si en cualquier intervalo $[a, b] \subset [0, \infty)$ hay a lo más un número finito de puntos de discontinuidades $t_1, \ldots, t_l$ de salto finito, esto significa que f es continua en cada intervalo (t_k, t_{k+1}), y $f(t)$, $t \in (t_k, t_{k+1})$, tiende a un limite finito cuando t tiende a t_k o t_{k+1}, para todo $k = 1, .., l-1$.

Definición 1. *Decimos que una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen constantes C, $M > 0$ y $T > 0$ tales que:*

$$|f(t)| \leq Me^{Ct} \quad \textit{para todo} \quad t \geq T$$

Ejemplos:

$$(1) \quad \text{para} \quad f(t) = t, \quad t \geq 0, \quad \text{se tiene} \quad |f(t)| = t \leq e^t,$$

por lo tanto es de orden exponencial con $M = 1, C = 1$ y T cualquier número positivo.

$$(2) \quad \text{para} \quad f(t) = \cos t, \quad t \geq 0, \quad \text{se tiene} \quad |f(t)| = |\cos t| \leq e^t,$$

por lo tanto es de orden exponencial con $M = 1, C = 1$ y T cualquier número positivo.

$$(3) \quad \text{para} \quad f(t) = t^n \sin t, \quad t \geq 0, \quad \text{se tiene} \quad |f(t)| \leq t^n \leq (e^t)^n = e^{nt},$$

por lo tanto es de orden exponencial con $M = 1, C = n$ y T cualquier número positivo.

Comencemos a continuación con la definición de la Transformada de Laplace.

Sea $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ y consideremos la expresión,

$$\int_0^\tau e^{-st} f(t) dt$$

donde $s \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$. Supongamos que

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^{\tau} e^{-st}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

existe, entonces

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

la llamaremos la transformada de Laplace de f. Es costumbre también denotar la transformada de Laplace por $\mathcal{L}(f(t))$. Así,

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

Notamos que el dominio de definición de esta transformada depende de la función f. En este respecto se tiene

Teorema 1. *Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua por trozos y de orden exponencial, i.e. existen constantes $M > 0$, C y $T > 0$ tales que*

$$|f(t)| \le Me^{Ct} \quad \textit{para todo} \quad t \ge T,$$

entonces $F(s)$ existe para todo $s > C$.

Demostración 1. Se tiene

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{\tau\to\infty}\int_0^{\tau} e^{-st}f(t)dt \\ &= \int_0^{T} e^{-st}f(t)dt + \lim_{\tau\to\infty}\int_T^{\tau} e^{-st}f(t)dt \end{aligned}$$

Ahora, de los cursos de cálculo se sabe que

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_T^{\tau} e^{-st}f(t)dt$$

existe, si

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_T^{\tau} e^{-st}|f(t)|dt = \int_T^{\infty} e^{-st}|f(t)|dt < \infty, \tag{1.1}$$

así que estudiaremos este ultimo limite. Se tiene

$$\begin{aligned}\int_T^\tau e^{-st}|f(t)|dt \leq M\int_T^\tau e^{-st}e^{Ct}dt = M\int_T^\tau e^{-(s-C)t}dt \\ = \frac{M}{s-C}[e^{-(s-C)T} - e^{-(s-C)\tau}]\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_T^\tau e^{-st}|f(t)|dt \leq \frac{M}{s-C}e^{-(s-C)T}, \quad \text{para todo} \quad s > C.$$

Luego,

$$\int_T^\infty e^{-st}|f(t)|dt < \infty, \quad \text{para todo} \quad s > C.$$

lo que implica que

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

existe para todo $s > C$, que es lo que se quería demostrar ■

El siguiente teorema nos dice que la transformada es continua.

Teorema 2. *Supongamos que la función f satisface las condiciones del teorema anterior, entonces la transformada de Laplace, $F(s)$, es continua en el intervalo (C,∞).*

Demostración 2. Sean $s_1, s_2 \in (C,\infty)$. Queremos demostrar que si $s_1 \to s_2$, entonces $F(s_1) \to F(s_2)$. Se tiene

$$\begin{aligned}F(s_1) &= \int_0^\infty e^{-s_1 t}f(t)dt \\ F(s_2) &= \int_0^\infty e^{-s_2 t}f(t)dt\end{aligned}$$

entonces,

$$|F(s_1) - F(s_2)| \leq \int_0^\infty |e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}||f(t)|dt.$$

Suponiendo, sin perder generalidad que $s_1 < s_2$, lo cual implica que $e^{-s_1 t} > e^{-s_2 t}$, se tiene

$$\begin{aligned}
|F(s_1) - F(s_2)| &\leq \int_0^\infty (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t})|f(t)|dt \\
&= \int_0^T (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t})|f(t)|dt + \int_T^\infty (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t})|f(t)|dt \\
&\leq c_1 \int_0^T (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t})dt + M \int_T^\infty (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t})e^{Ct}dt,
\end{aligned}$$

donde $c_1 = \sup_{t\in[0,T]} |f(t)|$. Notando que

$$\int_0^T e^{-s_1 t}dt \to \int_0^T e^{-s_2 t}dt \quad \text{cuando} \quad s_1 \to s_2$$

y que

$$\int_T^\infty (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t})e^{Ct}dt = \int_T^\infty (e^{-(s_1 - C)t} - e^{-(s_2 - C)t})dt$$

$$= \frac{1}{s_1 - C}e^{-(s_1 - C)T} - \frac{1}{s_2 - C}e^{-(s_2 - C)T} \to 0, \quad \text{cuando} \quad s_1 \to s_2,$$

se obtiene que

$$|F(s_1) - F(s_2)| \to 0, \quad \text{cuando} \quad s_1 \to s_2.$$

Esto implica que $F(s)$ es una función continua en (C, ∞).

En el siguiente teorema evaluamos la transformada de Laplace de algunas funciones elementales.

Teorema 3. *Se tiene lo siguiente*

(a) $\quad \mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{s}, \quad s > 0$

(b) $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad n \geq 1$

(c) $\mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$

(d) $\mathcal{L}(\sin kt) = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

(e) $\mathcal{L}(\cos kt) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

(f) $\mathcal{L}(\sinh kt) = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

(g) $\mathcal{L}(\cosh kt) = \dfrac{s}{s^2-k^2}$.

Demostración 3. (a) es inmediato. (b) por inducción, para $n = 1$, se debe tener

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1!}{s^2}$$

Probemos esto.

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau te^{-st}dt,$$

y se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau te^{-st}dt &= \frac{te^{-st}}{-s}\Big|_0^\tau + \frac{1}{s}\int_0^\tau e^{-st}dt \\
&= -\frac{\tau e^{-s\tau}}{s} + \frac{1}{s}\frac{e^{-s\tau}}{-s}\Big|_0^\tau \\
&= -\frac{e^{-s\tau}}{s} + \frac{1}{s^2}[1-e^{-s\tau}] \longrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \text{cuando} \quad \tau \to \infty.
\end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{L}(t) = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau te^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{1}{s^2}.$$

Suponemos ahora el resultado para n y queremos probarlo para $n+1$. Por definición

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau t^{n+1} e^{-st} dt$$

y

$$\int_0^\tau t^{n+1} e^{-st} dt = \frac{t^{n+1} e^{-st}}{-s}\Big|_0^\tau + \frac{(n+1)}{s} \int_0^\tau t^n e^{-st} dt.$$

Haciendo que $\tau \to \infty$ se obtiene

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \frac{(n+1)}{s} \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{(n+1)}{s} \mathcal{L}(t^n) = \frac{(n+1)}{s} \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}.$$

Para demostrar (c), por definición se tiene

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

Finalmente vamos a demostrar (d), el resto queda de ejercicio. Se tiene

$$\mathcal{L}(\sin kt) = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} \sin kt \; dt$$

y

$$\underbrace{\int_0^\tau e^{-st} \sin kt \; dt}_{I(\tau)} = \frac{\sin kt}{-s} e^{-st}\Big|_0^\tau + \frac{k}{s} \underbrace{\int_0^\tau e^{-st} \cos kt \; dt}_{J(\tau)}$$

de donde

$$I(\tau) = \frac{\sin k\tau}{-s} e^{-s\tau} + \frac{k}{s} J(\tau).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} J(\tau) &= \frac{\cos kt}{-s} e^{-st}\Big|_0^\tau - \frac{k}{s}\int_0^\tau e^{-st}\sin kt\ dt \\ &= \left(\frac{1}{s} - \frac{\cos k\tau\ e^{-s\tau}}{s}\right) - \frac{k}{s} I(\tau). \end{aligned}$$

Haciendo que $\tau \to \infty$ se obtiene primero que

$$I(\tau) \to \mathcal{L}(\sin kt) \quad \text{y} \quad J(\tau) \to \mathcal{L}(\cos kt)$$

y de las expresiones anteriores se obtiene entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin kt) &= \frac{k}{s}\mathcal{L}(\cos kt) \\ \mathcal{L}(\cos kt) &= \frac{1}{s} - \frac{k}{s}\mathcal{L}(\sin kt). \end{aligned}$$

Resolviendo

$$\mathcal{L}(\sin kt) = \frac{k}{s}\left[\frac{1}{s} - \frac{k}{s}\mathcal{L}(\sin kt)\right]$$

que implica

$$\mathcal{L}(\sin kt) = \frac{k}{s^2+k^2}$$

y análogamente,

$$\mathcal{L}(\cos kt) = \frac{s}{k}\mathcal{L}(\sin kt) = \frac{s}{s^2+k^2} \qquad \blacksquare$$

Notemos ahora que la T. de L. es un operador lineal. De la definición se tiene que si $f, g : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ admiten de la T. de L. entonces

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha\mathcal{L}(f(t)) + \beta\mathcal{L}(g(t))$$

para α y $\beta \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Esto se debe a que

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))dt$$

$$= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt.$$

Esto nos simplifica la evaluación de la T. de L.

Ejemplo Para evaluar la T. de L. de

$$\mathcal{L}(5\cos 3t + 10\sinh 6t) = 5\mathcal{L}(\cos 3t) + 10\mathcal{L}(\sinh 6t)$$

$$= \frac{5s}{s^2+9} + \frac{60}{s^2-36}.$$

1.1. Transformada Inversa.

Vamos a comenzar con un ejemplo. Sabemos que

$$\mathcal{L}(\cos kt) = \frac{s}{s^2+k^2} = F(s)$$

Supongamos ahora que tenemos dada la expresión,

$$F(s) = \frac{s}{s^2+k^2}$$

y queremos saber si existe una función $f(t)$ tal que,

$$F(s) = \frac{s}{s^2+k^2} = \mathcal{L}(f(t))$$

En este caso, sabemos la respuesta, evidentemente $f(t) = \cos kt$.

Más generalmente dada una función $F : (C, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ queremos saber si existe una función $f(t)$ tal que,

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)).$$

Si una tal f existe, entonces usaremos la siguiente notación,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

y la llamaremos la transformada inversa de $F(s)$.

Como consecuencia inmediata del teorema 3 se tiene el siguiente resultado

Teorema 4. *Se tiene los siguientes resultados:*

(a) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) = 1, \quad s > 0$

(b) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{n!}{s^{n+1}}) = t^n, \quad n \geq 1$ *entero*

(c) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-a}) = e^{at}, \quad s > a$

(d) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{k}{s^2+k^2}) = \sin kt$

(e) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+k^2}) = \cos kt$

(f) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{k}{s^2-k^2}) = \sinh kt \quad s > |k|$

(g) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2-k^2}) = \cosh kt \quad s > |k|$

Nota 1. Tenemos que la T. de L. de una función f esta definida por una integral

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = F(s).$$

Si g es una función que difiere de f en un número finito de puntos aislados entonces obviamente se tendrá que

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt = F(s).$$

Este simple ejemplo demuestra que la ecuación

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \tag{1.2}$$

no tiene solución única. Sin embargo, se puede demostrar que si dos funciones tienen la misma T. de L. entonces solo una de ellas puede ser continua.

En cuanto a propiedades de linealidad de la transformada inversa se tiene el siguiente resultado. Supongamos que

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

son funciones continuas (y de orden exponencial), entonces para α y β constantes cualesquiera

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)) = \alpha \mathcal{L}^{-1}(F(s)) + \beta \mathcal{L}^{-1}(G(s)).$$

En efecto, si

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = g(t)$$

donde f y g son funciones continuas, y si

$$Z(s) = \mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{L}(f(t)) + \beta \mathcal{L}(g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s),$$

entonces

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)),$$

que implica

$$\alpha \mathcal{L}^{-1}(F(s)) + \beta \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)).$$

Ejemplo. Calcule la transformada inversa de la función

$$F(s) = \frac{s+6}{s^2+4}.$$

Escribimos

$$\frac{s+6}{s^2+4} = \frac{s}{s^2+4} + 3\frac{2}{s^2+4},$$

entonces

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s+6}{s^2+4}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+4}) + 3\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+4}) = \cos 2t + 3\sin 2t.$$

Propiedades operacionales

Teorema 5. *(Primer teorema de traslación.) Sea $a \in \mathbb{R}$, y $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función que admite transformada de Laplace. Entonces*

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

Demostración 4. Se tiene que

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = F(s),$$

entonces

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a) \blacksquare$$

Ejemplo. Evaluemos $\mathcal{L}(e^{-2t}\cos(4t))$. Se tiene que $f(t) = \cos(4t)$ y $a = -2$.

$$F(s) = \mathcal{L}(\cos(4t)) = \frac{s}{s^2+16}$$

$$F(s+2) = \mathcal{L}(e^{-2t}\cos(4t)) = \frac{s+2}{(s+2)^2+16} = \frac{s+2}{s^2+4s+20}$$

Del teorema anterior se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{at}f(t)$$

con $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$.

Ejemplo. Encuentre $f(t)$ tal que $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+6s+11})$.

Completando el cuadrado del binomio en el denominador

$$\frac{s}{s^2+6s+11} = \frac{s}{(s+3)^2+2}$$

y descomponiendo para identificar transformadas conocidas

$$= \frac{s+3}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2} - \frac{3}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{s+3}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2}$$

que tienen respectivamente la forma $\frac{s}{s^2+k^2}$ y $\frac{k}{s^2+k^2}$ (con $k=\sqrt{2}$) pero desplazadas.

Sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+(\sqrt{2})^2}) = \cos(\sqrt{2}t)$$

y utilizando el teorema anterior,

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s+3}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2}) = (\cos(\sqrt{2}t))e^{-3t}$$

De la misma forma

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2}) = (\sin(\sqrt{2}t))e^{-3t}$$

ya que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}) = \sin(\sqrt{2}t)$.

Finalmente usando la linealidad de la transformada inversa, se concluye que

$$f(t) = \cos(\sqrt{2}t)e^{-3t} - \frac{3}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)e^{-3t}.$$

En el segundo teorema de traslación vamos a usar la siguiente función, que llamaremos función escalón unitario o simplemente función escalón.

$$U(t-a) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } 0 \leq t < a, \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{array} \right\}$$

donde $a \geq 0$. Notemos que esta función está definida para $t \geq 0$, es continua a trozos, y de orden exponencial. En particular la función $U(t)$ es igual a 1 para todo $t \geq 0$.

Teorema 6. *(Segundo teorema de traslación) Sea $a \geq 0$ y $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función que admite transformada de Laplace. Entonces*

$$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a)) = e^{-as}F(s)$$

con $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

Demostración 5. De la definición de T. de L.

$$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a)) = \int_0^\infty f(t-a)U(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt.$$

Haciendo el cambio de variable de integración $t - a = u$, nos queda

$$\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a)) = \int_0^\infty f(u)e^{-s(a+u)}du = e^{-sa}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du$$

$$= e^{-sa}F(s). \blacksquare$$

Nota. La forma inversa del teorema es

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-sa}F(s)) = f(t-a)U(t-a).$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo. Consideremos la función f definida por

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 \le t < 3 \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 3. \end{cases}$$

Con la ayuda de la función escalón la podemos escribir como

$$f(t) = 2U(t) - 3U(t-2) + U(t-3).$$

Evaluando su T. de L., obtenemos

$$\mathcal{L}(f(t)) = 2\mathcal{L}(U(t)) - 3\mathcal{L}(U(t-2)) + \mathcal{L}(U(t-3))$$

$$= \frac{2}{s} - \frac{3}{s}e^{-2s} + \frac{e^{-3s}}{s}$$

Ejemplo. Calculemos $\mathcal{L}(\sin t\, U(t-2\pi))$. Notamos que esta función aparentemente no tiene la forma $\mathcal{L}(f(t-a)U(t-a))$. Sin embargo se puede reducir a dicha forma usando que $\sin t$ es 2π periódica, esto es $\sin t = \sin(t-2\pi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces $\sin t\, U(t-2\pi) = \sin(t-2\pi)U(t-2\pi)$, con lo cual

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\sin t\, U(t-2\pi)) &= \mathcal{L}(\sin(t-2\pi)U(t-2\pi)) \\
&= e^{-2\pi s}\mathcal{L}(\sin t) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

Teorema 7. *(Derivadas de una transformada) Sea $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ continua a trozos y de orden exponencial ($|f(t)| \leq Me^{Ct}$ para todo $t \geq T$). Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s > C+n$, se tiene que*

$$
\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t)) \tag{1.3}
$$

donde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

Nota 1. Este teorema se usa muchas veces en la forma

$$
\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s).
$$

Nota 2. Se tiene que $|t^n f(t)| \leq e^{nt}Me^{Ct} = Me^{(C+n)t}$, por lo que $\frac{d^n}{ds^n}F(s)$ quedará definida para todo $s > C+n$.

Demostración 6. Por definición

$$
F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt.
$$

Notamos que (1.3) se puede obtener derivando formalmente bajo la integral con respecto a s. Se obtiene

$$
\frac{dF(s)}{ds} = -\int_0^\infty te^{-st}f(t)dt \tag{1.4}
$$

que corresponde al caso $n=1$ en (1.3),

$$
\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \int_0^\infty t^2e^{-st}f(t)dt,
$$

etc. Justifiquemos este proceso. Tomemos $s > C + 1$ y formemos

$$F(s+h) - F(s) = \int_0^\infty (e^{-(s+h)t} - e^{-st}) f(t) dt = \int_0^\infty (e^{-ht} - 1) e^{-st} f(t) dt. \quad (1.5)$$

Definamos

$$I(h) := \frac{F(s+h) - F(s)}{h} + \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt.$$

(1.4) será cierta si $\lim_{h \to 0} I(h) = 0$. Probemos esto. De (1.5) se tiene

$$I(h) = \int_0^\infty ((\frac{e^{-ht} - 1}{h}) + t) f(t) e^{-st} dt. \quad (1.6)$$

Usamos desarrollo en series para acotar la función $(\frac{e^{-ht}-1}{h}) + t)$, se tiene

$$\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t = \frac{ht^2}{2!} - \frac{h^2 t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$= h(\frac{t^2}{2!} - \frac{ht^3}{3!} \pm \cdots).$$

Con lo cual

$$|\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t| \leq |h|(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \cdots),$$

donde sin pérdida de generalidad tomamos $|h| \leq 1$. Entonces

$$|\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t| \leq |h| e^t$$

Tomando valor absoluto en (1.6), reemplazando la ultima expresión, y usando que f es de orden exponencial, obtenemos

$$|I(h)| \leq |h| \int_0^\infty e^t |f(t)| e^{-st} dt \leq |h| \Big(\int_0^T e^{(1-s)t} f(t) dt + M \int_T^\infty e^{-(s-C-1)t} dt \Big),$$

donde recordamos que $s > C + 1$. Por lo tanto

$$|I(h)| \leq |h| \Big(\int_0^T e^{(1-s)t} f(t) dt + \frac{M e^{-(s-C-1)T}}{s - C - 1} \Big),$$

de donde $\lim\limits_{h \to 0} I(h) = 0$.

Ahora vamos a probar el caso general. Lo hacemos por inducción, notamos que la demostración recién hecha corresponde al caso $n = 1$. Supongamos entonces (1.3) para n y probemos el caso $n + 1$. Suponemos aqui $s > C + n + 1$. De la definición de T. de L.

$$\mathcal{L}(t^{n+1} f(t)) = \int_0^\infty t^{n+1} f(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty t^n (t f(t)) e^{-st} dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} G(s)$$

donde $G(s) = \mathcal{L}(t f(t))$. Pero

$$\mathcal{L}(t f(t)) = (-1) \frac{d}{ds} F(s),$$

por lo que

$$\mathcal{L}(t^{n+1} f(t)) = (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}} F(s). \blacksquare$$

Nota. La forma inversa de este Teorema es

$$t^n f(t) = (-1)^n \mathcal{L}^{-1} \Big(\frac{d^n}{ds^n} F(s) \Big)$$

.

Algunos ejemplos.

Ejemplo. Se pide evaluar $\mathcal{L}(t^2\sin(kt))$.

Vamos a aplicar el teorema anterior. Tomamos $f(t)=\sin(kt)$, entonces

$$F(s)=\mathcal{L}(\sin(kt))=\frac{k}{s^2+k^2}.$$

Del teorema anterior, con $n=2$, se tiene

$$\mathcal{L}(t^2\sin(kt))=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)=\frac{d^2}{ds^2}\frac{k}{s^2+k^2}.$$

Derivando

$$\frac{dF(s)}{ds}=\frac{-2ks}{(s^2+k^2)^2}$$

y

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2}=\frac{2k(3s^2-k^2)}{(s^2+k^2)^3}.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(t^2\sin(kt))=2k\frac{3s^2-k^2}{(s^2+k^2)^3}.$$

Notemos que también se tiene

$$t^2\sin(kt)=2k\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{3s^2-k^2}{(s^2+k^2)^3}\Big).$$

Ejemplo. Se quiere calcular $\mathcal{L}(te^{-t}\cos t)$. Usamos el teorema anterior, con $f(t) = e^{-t}\cos t$. Se tiene

$$F(s) = \mathcal{L}(e^{-t}\cos t) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}.$$

Derivando

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{-(s^2+2s)}{(s^2+2s+2)^2},$$

y aplicando el teorema anterior, se obtiene

$$\mathcal{L}(te^{-t}\cos t) = \frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}.$$

A continuación vamos a aplicar la T. de L. para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden n de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t),$$

donde los coeficientes $a_0, \cdots, a_n$ son constantes. El método consitirá en aplicar T. de L. a ambos miembros de esta ecuación. De aquí se ve la necesidad de saber calcular la T. de L. de derivadas de y. Esto lo hacemos en el siguiente teorema.

Recordemos primero que $h : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ es de orden exponencial si existen constantes positivas C, M, T tal que

$$|h(t)| \leq Me^{Ct} \quad \text{para todo} \quad t \geq T. \tag{1.7}$$

Teorema 8. *(Transformada de derivadas.) Sea* $f : [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ *que satisface la siguiente condición.* $f, f', \ldots, f^{(n)}$ *son continuas a trozos y de orden exponencial, suponemos que todas estas funciones satisfacen (1.7), con las mismas constantes. Entonces, si* $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$*, se tiene*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad s > C.$$

Notemos que $f, f', \ldots, f^{(n)}$ son continuas excepto en un conjunto numerable de puntos en $[0, \infty)$.

Demostración 7. Por inducción. Primero el caso $n = 1$. Queremos demostrar

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0).$$

Se tiene:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau f'(t) e^{-st} dt$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \left[f(t) e^{-st} |_0^\tau + s \int_0^\tau f(t) e^{-st} dt \right]$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \left[f(\tau) e^{-s\tau} - f(0) + s \int_0^\tau f(t) e^{-st} dt \right]$$

$$= s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0),$$

ya que

$$|f(\tau) e^{-s\tau}| \leq M e^{C\tau} e^{-s\tau} = M e^{-(s-C)\tau}, \quad s > C,$$

y por lo tanto

$$\lim_{\tau \to \infty} f(\tau) e^{-s\tau} = 0.$$

Queda entonces demostrado el caso $n = 1$. Supongamos a continuación el resultado cierto para n y queremos probarlo para $n + 1$. Se tiene:

$$\mathcal{L}(f^{(n+1)}(t)) = \int_0^\infty f^{(n+1)}(t)e^{-st}dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\Big[f^{(n)}(t)e^{-st}|_0^\tau + s\int_0^\tau f^{(n)}(t)e^{-st}dt\Big]$$

$$= s\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) - f^{(n)}(0).$$

Esto es

$$\mathcal{L}(f^{(n+1)}(t)) = s\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) - f^{(n)}(0).$$

Reemplazando en esta expresión

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

que es la hipótesis de inducción, nos queda finalmente

$$\mathcal{L}(f^{(n+1)}(t)) = s^{n+1}F(s) - s^n f(0)\ldots - sf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0),$$

que es el caso $n+1$. Esto termina la demostración ■

Aplicaciones a EDO

Consideremos

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_n,$$

donde g es una función que admite T. de L. y

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \quad y \quad c_0, \ldots, c_n \text{ son constantes reales.}$$

Vamos a aplicar T. de L. a ambos miembros. Sea

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t)),$$

entonces, del teorema anterior

$$\mathcal{L}(y^{(i)}(t)) = s^i Y(s) - s^{i-1}y(0) - s^{i-2}y'(0) - \cdots - sy^{(i-2)}(0) - y^{(i-1)}(0),$$

para $i = 1, ..., n$. Aplicando esto a la ecuación diferencial, se obtiene

$$a_n[s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)] +$$

$$a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \ldots - y^{(n-2)}(0)] +$$

$$a_{n-2}[s^{n-2}Y(s) - s^{n-3}y(0) - \ldots - y^{(n-3)}(0)] + \cdots + a_0 Y(s) = G(s)$$

donde $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$. Agrupando, se obtiene

$$P(s)Y(s) + Q(s) = G(s).$$

donde

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

(polinomio característico) y $Q(s)$ es un polinomio de grado s^{n-1} en s, función de las condiciones iniciales. Despejando $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{G(s) - Q(s)}{P(s)} = \frac{G(s)}{P(s)} - \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Para encontrar $y(t)$ tenemos que aplicar transformada inversa a esta ultima expresión, nos da

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{P(s)}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{Q(s)}{P(s)}\}$$

Ejercicio. Resuelva usando T. de L.

$$y' - 3y = e^{2t}, \quad y(0) = 1.$$

Aplicando T. de L. y con la notación anterior

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_{1} - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$(s-3)Y(s) = 1 + \frac{1}{s-2} = \frac{s-1}{s-2}$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)},$$

usamos fracciones parciales, (repasar), para lo cual escribimos:

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}$$

calculando, obtenemos

$$A = -1 \quad B = 2.$$

y por lo tanto

$$Y(s) = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-3}.$$

Aplicando T. I., resulta

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-2}) + 2\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-3})$$

$$= -e^{2t} + 2e^{3t}.$$

Ejemplo. Resuelva usando T. de L. (ecuación del péndulo en resonancia)

$$y'' + k^2 y = \cos kt, \qquad k > 0,$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2.$$

Aplicando T. de L. en ámbos lados de la ecuación, se obtiene:

$$s^2 Y(s) - sc_1 - c_2 + k^2 Y(s) = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + k^2)^2} + \frac{sc_1 + c_2}{s^2 + k^2}$$

$$= \frac{s}{(s^2 + k^2)^2} + c_1 \frac{s}{s^2 + k^2} + c_2 \frac{1}{s^2 + k^2}.$$

Aplicando T. I.,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2 + k^2)^2}\} +$$

$$c_1 \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2 + k^2}\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2 + k^2}\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2 + k^2)^2}\} + c_1 \cos kt + \frac{c_2}{k} \sin kt.$$

Para evaluar $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2 + k^2)^2}\}$ vamos a usar la fórmula $\frac{d}{ds}F(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$, o mejor $tf(t) = -\mathcal{L}^{-1}(\frac{d}{ds}F(s))$. Identificando $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + k^2}$, se tiene primero que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{k}\sin kt.$$

A continuación notando que

$$\frac{s}{(s^2+k^2)^2} = \frac{1}{2}(\frac{2s}{(s^2+k^2)^2}) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+k^2}).$$

se tiene que

$$-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+k^2}) = -\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\} = \mathcal{L}\{t\frac{\sin kt}{k}\},$$

y entonces

$$\frac{s}{(s^2+k^2)^2} = \frac{1}{2k}\mathcal{L}\{t\sin kt\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(s^2+k^2)^2})\} = \frac{1}{2k}t\sin kt. \tag{1.8}$$

Finalmente

$$y(t) = \frac{t\sin kt}{2k} + c_1\cos kt + \frac{c_2}{k}\sin kt$$

Ejercicio. Resuelva la ecuación con condiciones iniciales

$$y'' + 16y = f(t), \quad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1.$$

donde $f(t) = \cos 4t\,(U(t) - U(t-\pi))$. Poniendo $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$, y aplicando T. de L.

$$s^2Y(s) - 1 + 16Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{1.9}$$

pero

$$f(t) = \cos 4t\,(U(t) - U(t-\pi)) = \cos 4t - \cos 4t\,U(t-\pi)$$

$$= \cos 4t - \cos 4(t-\pi)U(t-\pi),$$

de donde

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s^2+16} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+16}.$$

Substituyendo en (1.9) y despejando $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+16)^2} - e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+16)^2} + \frac{1}{s^2+16}. \qquad (1.10)$$

Ahora de (1.8), se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(s^2+16)^2}) = \frac{1}{8}t\sin 4t.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+16)^2}\} = \frac{1}{8}U(t-\pi)(t-\pi)\sin 4(t-\pi).$$

Finalmente tomando T.I en (1.10), nos queda

$$y(t) = \frac{1}{8}t\sin 4t - \frac{1}{8}U(t-\pi)(t-\pi)\underbrace{\sin 4(t-\pi)}_{\sin 4t} + \frac{1}{4}\sin 4t$$

$$= \frac{\sin 4t}{4}(\frac{t}{2} - \frac{U(t-\pi)(t-\pi)}{2} + 1),$$

que se puede escribir como,

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{8}t\sin 4t & 0 \leq t < \pi \\ \frac{2+\pi}{8}\sin 4t & t \geq \pi. \end{cases}$$

Producto de Convolución

Sean $f, g : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones que admiten T. de L. Definimos el producto de convolución de f y g, que denotamos por $f * g$, de la forma siguiente:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Es inmediato ver que este producto satisface

$$f * g = g * f.$$

En efecto, haciendo el cambio de variable $t - \tau = s$ en la definición, se tiene

$$(f * g)(t) = -\int_t^0 f(t-s)g(s)ds = \int_0^t f(t-s)g(s)ds = (g * f)(t)$$

El teorema principal respecto del producto de convolución es el siguiente.

Teorema 9. *Sean $f, g : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones continuas a trozos y de orden exponencial tal que ambas satisfacen (1.7), entonces*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ y $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$.

Forma inversa del teorema:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(t)$$

Demostración 8 (del Teorema 9)**.** Vamos a redefinir f y g agregando la condición que

$$f(t) = g(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t < 0.$$

Del segundo teorema de traslación se tiene que

$$\mathcal{L}(g(t-\tau)) = \int_0^\infty g(t-\tau)e^{-st}dt = \int_0^\infty U(t-\tau)g(t-\tau)e^{-st}dt = e^{-s\tau}G(s),$$

donde $s > C$. De aquí

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)G(s)e^{-s\tau}d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-st}dtd\tau$$

Se puede demostrar (ej.) que

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt.$$

Entonces

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt,$$

ya que $g(t-\tau) = 0$ para $t < \tau$. Así

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau dt = \mathcal{L}((f * g)(t)). \blacksquare$$

Ejercicio. Demuestre que la función $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ en el teorema anterior es de orden exponencial.

Nota. Un caso particular interesante es cuando $f = g$. En este caso se tiene

$$(F(s))^2 = \mathcal{L}((f * f)(t)).$$

Ejemplo. Encuentre $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s^2+k^2)^2})$. Aplicando la forma inversa del teorema, se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s^2+k^2)^2}) = \frac{1}{k^2}(\sin k(\cdot) * \sin k(\cdot))(t)$$

$$= \frac{1}{k^2}\int_0^t \sin k\tau \sin k(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt),$$

donde hemos usado las identidades trigonométricas:

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B, \tag{1.11}$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B. \tag{1.12}$$

Corolario 1. *Transformada de una integral. Sea $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ continua a trozos y de orden exponencial. Entonces*

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s),$$

donde

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)).$$

Forma inversa del teorema.

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}F(s)) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Demostración 9 (del Corolario 1)**.** Se tiene

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = -\int_t^0 f(t-s)ds = \int_0^t f(t-s)ds$$

donde hemos hecho el cambio de variable $\tau = t - s$. Mirando la ultima expresión como la integral de 1 por $f(t-s)$ y recordando que $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$, del ultimo teorema se sigue inmediatamente que

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s).$$

Ejercicio. Encuentre $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)})$

Definiendo $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ y $G(s) = \frac{1}{s^2+4}$, se tiene que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+1}) = \sin t$$

y

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+4}) = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

Entonces del teorema anterior, se sigue que

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sin\tau \sin 2(t-\tau)d\tau.$$

Usando las identidades trigonométricas (1.11), (1.12), se obtiene que

$$2\sin\tau \sin 2(t-\tau) = \cos{(3t-2\tau)} - \cos{(2t-\tau)}.$$

Reemplazando esta expresión en la integral e integrando, resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t$$

Ejercicio. Encuentre $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(s^2+k^2)})$.

Definiendo $F(s) = \frac{s}{s^2+k^2}$ y $G(s) = \frac{1}{s^2+k^2}$, se tiene que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+k^2}) = \cos kt$$

y

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+k^2}) = \frac{1}{k}\sin kt.$$

Del teorema del producto de convolución

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(s^2+k^2)^2}) = \frac{1}{k}\int_0^t \cos k\tau \sin k(t-\tau)d\tau = \frac{t\sin(kt)}{2k},$$

que es el mismo valor que conseguimos por otro método.

Teorema 10. *Sea $f:[0,\infty)\mapsto \mathbb{R}$ continua a a trozo y de orden exponencial ($|f(t)| \leq Me^{Ct}$, $t \geq T$). Supongamos que existe una constante $a > 0$ tal que $f(t+a) = f(t)$, para todo $t \geq 0$. Entonces*

$$F(s) = \frac{\int_0^a e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sa}},$$

donde como siempre $F(s) = \mathcal{L}(f(t)$.

En este caso diremos que la función $f(t)$ es $a-$ periódica para $t \geq 0$.

Demostración 10. Se tiene, por definición de la T. de L.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^a e^{-st} f(t)dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Haciendo el cambio de variable de integración $\tau = t - a$ en la ultima integral, se obtiene

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau + a)d\tau = e^{-sa} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = e^{-sa} F(s),$$

por lo que

$$F(s) = \int_0^a e^{-st} f(t)dt + e^{-sa} F(s),$$

que implica el resultado. ■

Ejercicio. Encuentre la T. de L. de la función $M_b(t)$ definida por

$$M_b(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t < b \\ -1 & \text{si} \quad b \leq t < 2b, \end{cases}$$
$$M_b(t + 2b) = M_b(t).$$

Se tiene

$$\int_0^{2b} e^{-st} M_b(t)dt = \int_0^b e^{-st} dt - \int_b^{2b} e^{-st} dt = \frac{1}{s}(1 - e^{-bs})^2.$$

Entonces

$$\mathcal{L}(M_b(t)) = \frac{(1-e^{-bs})^2}{s(1-e^{-2bs})} = \frac{(1-e^{-bs})}{s(1+e^{-bs})} = \frac{1}{s}\tanh\frac{bs}{2}. \tag{1.13}$$

Ejercicio. Se quiere encontrar la T. de L. de $H_b(t)$, dado por

$$H_b(t) = \quad \begin{cases} t \quad \text{si} \quad 0 \leq t < b \\ 2b - t \quad \text{si} \quad b \leq t < 2b, \end{cases}$$

$$H_b(t+2b) = H_b(t).$$

Para resolver este problema notamos que H_b satisface $H_b(t) = \int_0^t M_b(\tau)d\tau$. Esto es claro si $t \in [0, 2b)$. Si $t \geq 2b$ se tiene

$$H_b(t+2b) = \int_0^{t+2b} M_b(\tau)d\tau = \int_0^t M_b(\tau)d\tau + \int_t^{t+2b} M_b(\tau)d\tau$$

$$= H_b(t) + \int_t^{t+2b} M_b(\tau)d\tau.$$

Por lo que hay que probar que

$$\int_t^{t+2b} M_b(\tau)d\tau = 0,$$

lo cual queda de ejercicio.

Aplicando la formula $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, se obtiene de inmediato que

$$\mathcal{L}(H_b(t)) = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{bs}{2}.$$

A continuación por aplicación directa de (1.13) se tiene que

$$\mathcal{L}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}M_b(t)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} + \frac{(1-e^{-bs})}{s(1+e^{-bs})}) = \frac{1}{s(1+e^{-bs})}.$$

Notemos que la función $R_b(t) := \frac{1}{2}+\frac{1}{2}M_b(t)$ queda dada por la siguiente expresión:

$$R_b(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t < b \\ 0 & \text{si} \quad b \le t < 2b, \end{cases}$$

$$R_b(t+2b) = R_b(t).$$

Usando terminologia de Ingenieria eléctrica decimos que $R_b(t)$ es una rectificación de media onda de la función $M_b(t)$.

Más generalmente consideremos una función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ continua a trozos en el intervalo $[0, 2b]$ y que satisface $f(t + b) = -f(t)$ para $t \in [0, b)$ y $f(t + 2b) = f(t)$ para todo $t > 0$. Calculemos la T. de L. de esta función. Se tiene primero lo siguiente.

$$\int_0^{2b} e^{-st} f(t)dt = \int_0^b e^{-st} f(t)dt + \int_b^{2b} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^b e^{-st} f(t)dt + \int_0^b e^{-s(\tau+b)} f(\tau + b)d\tau = \int_0^b e^{-st} f(t)dt - e^{-sb} \int_0^b e^{-st} f(t)dt$$

$$= (1 - e^{-bs}) \int_0^b e^{-st} f(t)dt.$$

A continuación aplicando la formula para la transformada de una función periódica, obtenemos

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{(1 - e^{-2sb})} \int_0^{2b} e^{-st} f(t)dt = \frac{(1 - e^{-bs})}{(1 - e^{-2sb})} \int_0^b e^{-st} f(t)dt,$$

de donde finalmente obtenemos

$$F(s) = \frac{1}{(1 + e^{-sb})} \int_0^b e^{-st} f(t)dt.$$

Sea ahora $f_1(t)$ la rectificación de media onda de $f(t)$. Evaluemos su T. de L. Tenemos que esta función es $2b$ periódica, aplicando entonces la formula para la transformada de una función periódica, obtenemos

$$F_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)dt = \frac{1}{(1-e^{-2sb})} \int_0^{2b} e^{-st} f_1(t)dt$$

$$= \frac{1}{(1-e^{-2sb})} \int_0^{b} e^{-st} f(t)dt = \frac{(1+e^{-sb})}{(1-e^{-2sb})} F(s) = \frac{F(s)}{(1-e^{-sb})}.$$

Definamos a continuación la función $f_2(t) = f_1(t-b)$, donde suponemos $f_1(\tau) = 0$ para $\tau < 0$. Entonces se tiene

$$F_2(s) := \mathcal{L}(f_2(t)) = \mathcal{L}(f_1(t-b)) = \mathcal{L}(U(t-b)(f_1(t-b)) = e^{-bs} F_1(s) = \frac{e^{-bs} F(s)}{(1-e^{-sb})}.$$

Supongamos finalmente que $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Entonces

$$F_3(s) := \mathcal{L}(f_3(t)) = \mathcal{L}(f_1(t)) + \mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{F(s)}{(1-e^{-sb})} + \frac{e^{-bs} F(s)}{(1-e^{-sb})}$$

$$= \frac{(1+e^{-bs})F(s)}{(1-e^{-sb})} = \coth(\frac{bs}{2})F(s).$$

La función f_3 se llama la rectificación de onda completa de la función f.

Ejercicio. Consideremos $f(t) = \sin t$. Sabemos que $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$. A modo de ejercicio vamos a calcular esta transformada asi como otras aplicando las formulas anteriores.

Se tiene que $f(t) = \sin t$ satisface las condiciones $f(t+\pi) = -f(t)$ para $t \in [0, \pi)$ y $f(t+2\pi) = f(t)$ para todo $t > 0$. Podemos calcular su transformada por la formula

$$F(s) = \frac{1}{(1+e^{-s\pi})} \int_0^\pi e^{-st} \sin t dt.$$

Como se tiene que

$$\int_0^\pi e^{-st} \sin t dt = (e^{\pi s} + 1) \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1},$$

se obtiene

$$F(s) = \frac{1}{(1+e^{-s\pi})} (e^{-\pi s} + 1) \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}.$$

La rectificación de media onda de $\sin t$ es la función

$$f_1(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si} \quad \pi \leq t < 2\pi, \end{cases}$$

$$f_1(t+2\pi) = f_1(t).$$

Su transformada es dada por

$$F_1(s) = \frac{F(s)}{(1-e^{-s\pi})} = \frac{1}{(1-e^{-s\pi})(s^2+1)}.$$

Evaluemos la T. de L. de la función $f_2(t) = f_1(t-\pi)$, donde suponemos $f_1(\tau) = 0$ para $\tau < 0$. Notamos primero que

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi \\ |\sin t| & \text{si} \quad \pi \leq t < 2\pi, \end{cases}$$

$$f_2(t+2\pi) = f_2(t).$$

Entonces se tiene

$$F_2(s) := \mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{e^{-\pi s}F(s)}{(1-e^{-s\pi})} = \frac{e^{-\pi s}}{(1-e^{-s\pi})(s^2+1)}.$$

Supongamos finalmente que $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Entonces es claro que $f_3(t) = |\sin t|$, para todo $t \geq 0$. Se tiene de las formulas anteriores que

$$F_3(s) = \coth(\frac{\pi s}{2})F(s) = \frac{\coth(\frac{\pi s}{2})}{s^2+1}.$$

La función f_3 se llama la rectificación de onda completa de $\sin t$.

Por otro lado como la función $|\sin t|$ es π periodica su transformada se puede calcular directamente por medio de

$$F_3(s) = \mathcal{L}(|\sin t|) = \frac{1}{(1-e^{-s\pi})}\int_0^\pi e^{-st}|\sin t|dt,$$

lo que nos da el mismo resultado.

Vamos a estudiar ahora una condición que debe cumplir una función $F : [C, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, para ser la T. de L. de una función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ continua a trozos y de orden exponencial, esto es

$$|f(t)| \leq Me^{Ct} \quad \text{para todo} \quad t \geq T.$$

Como en la clase pasada, existe una constante $N > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Ne^{Ct} \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Entonces se tiene

$$|F(s)| = |\mathcal{L}(f(t))| \leq \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt \leq N \int_0^\infty e^{-(s-C)t}dt \leq \frac{N}{s-C},$$

de donde

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

En particular , la función $\dfrac{s}{s+1}$ no es la T. de L . de ninguna función continua a trozos y de orden exponencial.

A continuación vamos a estudiar las funciones delta de Dirac.

Consideremos primero el siguiente ejemplo. Sea $h_n^a : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$h_n^a(t) = \begin{cases} n & \text{si} \quad a \leq t < a + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [a, a + \frac{1}{n}). \end{cases}$$

donde $a \geq 0$. Entonces para todo $b \geq a + \frac{1}{n}$, se tiene

$$\int_0^b h_n^a(t)dt = \int_a^{a+\frac{1}{n}} h_n^a(t)dt = 1,$$

y de aquí

$$\int_0^\infty h_n^a(t)dt = 1.$$

Notamos que tomando el límite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b h_n^a(t)dt = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty h_n^a(t)dt = 1.$$

Supongamos que se pudiera intercambiar el límite con la integral y llamemos $\delta_a(t)$ la función límite bajo el signo integral, esto es

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b h_n^a(t)dt = \int_0^b \lim_{n\to\infty} h_n^a(t)dt = \int_0^b \delta_a(t)dt = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty h_n^a(t)dt = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} h_n^a(t)dt = \int_0^\infty \delta_a(t)dt = 1.$$

Mostremos a continuación que tal función $\delta_a(t)$ no puede existir. En efecto, como es inmediato de ver, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^a(t) = 0$ excepto en el punto a. De la teoría de integración se sigue entonces que $\int_0^\infty \lim\limits_{n\to\infty} h_n^a(t)dt = 0$, lo que nos da una contradicción.

Vamos a introducir a continuación las funciones δ. Sea $g : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, para n grande, por el teorema del valor medio, se tiene que

$$\int_a^{a+\frac{1}{n}} g(t)dt = \frac{1}{n}g(t^*),$$

para algún $t^* \in [a, a+\frac{1}{n}]$. De aquí, usando la continuidad de g, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty h_n^a(t)g(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^{a+\frac{1}{n}} h_n^a(t)g(t)dt = \lim_{n\to\infty} n\int_a^{a+\frac{1}{n}} g(t)dt = g(a).$$

Sabemos por lo visto antes que no podemos pasar el límite bajo el signo integral. Sin embargo podemos pensar así, el proceso que hemos hecho asigna a cada g continua su valor $g(a)$. LLamemos Δ_a el operador que manda las funciones g en su valor en el punto a, esto es $\Delta_a(g) = g(a)$. Es fácil ver que para α y β reales:

$$\Delta_a(\alpha g + \beta h) = (\alpha g + \beta h)(a) = \alpha g(a) + \beta h(a) = \alpha\Delta_a(g) + \beta\Delta_a(h).$$

esto es el operador Δ_a es lineal. Es costumbre escribir

$$\Delta_a(g) = \int_0^\infty \delta_a(t)g(t)dt,$$

con lo que la acción del operador Δ_a, queda como

$$\int_0^\infty \delta_a(t)g(t)dt = g(a).$$

Por abuso de lenguaje vamos a llamar al símbolo δ_a una función δ. El operador Δ_a es lo que se conoce como una distribución, llamada la distribución de Dirac. Notemos que si tomamos $g(t) = e^{-st}$ entonces

$$\int_0^\infty \delta_a(t)e^{-st}dt = e^{-sa}.$$

Debido a esto vamos a decir que la T. de L. de la función δ_a es e^{-sa}, esto es $\mathcal{L}(\delta_a) = e^{-sa}$. En particular si $a = 0$ entonces denotando $\delta(t) := \delta_0(t)$ se tiene $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$. Se tiene también que $\delta_a(t) = \delta(t-a)$.

Nosotros queremos resolver ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes con segundo miembro que contiene funciones δ. Consideremos primero el caso de la ecuación

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = \delta_a(t). \tag{1.14}$$

A una ecuación como esta le vamos dar el siguiente sentido. Consideramos el problema

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = h_n^a(t),$$

y llamaremos y_n^a su solución. Entonces por solución de (1.14) vamos a entender $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^a(t) = y(t)$. Calculemos entonces y_n^a. Como

$$h_n^a(t) = n(U(t-a) - U(t-a-\frac{1}{n})),$$

tenemos que resolver

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = n(U(t-a) - U(t-a-\frac{1}{n})).$$

Para simplificar el análisis vamos a suponer además que la solución que buscamos satisface $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Llamando $Y_n(s) = \mathcal{L}(y(t))$ y tomando T. de L. en ambos lados de la ecuación se obtiene

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)Y_n(s) = n\frac{e^{-sa} - e^{-s(a+\frac{1}{n})}}{s} = e^{-sa}\frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\frac{s}{n}}.$$

de donde

$$Y_n(s) = \frac{e^{-sa}}{(a_2s^2 + a_1s + a_0)}\frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\frac{s}{n}}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\frac{s}{n}} = 1,$$

haciendo tender $n \to \infty$ en la ultima ecuación, se obtiene

$$Y_\infty(s) = \frac{e^{-sa}}{(a_2s^2 + a_1s + a_0)}. \tag{1.15}$$

Notamos que este resultado se puede obtener también si tomamos T. de L. en ambos lados de (1.14), usamos que $\mathcal{L}(\delta_a) = e^{-sa}$, y suponemos que la igualdad se mantiene, se obtiene

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = e^{-sa},$$

de donde se sigue (1.15). Esto nos da un método formal para calcular el correspondiente Y_∞ en otros problemas de ecuaciones diferenciales con segundos miembros que contienen funciones δ, este método consiste en tratar esta función δ como una función ordinaria cuando se aplica T. de L. Aplicando Transformada inversa obtenemos $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_\infty(s))$. Finalmente hay que demostrar que $\lim_{n\to\infty} y_n^a(t) = y(t)$.

Ejemplo. Resolvamos:

$$y'' + ay = 4\delta(t - 2\pi)$$
$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

Aplicando T. de L.:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 4e^{-2s\pi}$$

$$s^2Y(s) + 4Y(s) = s + 4e^{-2s\pi}$$

$$Y(s) = \frac{s + 4e^{-2s\pi}}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{4}{s^2 + 4}e^{-2s\pi}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2 + 4}) + 4\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-2s\pi}}{s^2 + 4})$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2 + 4}) = \cos 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-2s\pi}}{s^2 + 4}) = \frac{1}{2}\sin 2(t - 2\pi)U(t - 2\pi),$$

de donde

$$y(t) = \cos 2t + 2\sin 2t\, U(t - 2\pi).$$

Ejemplo. Consideremos los dos problemas

$$my'' + k^2 y = 0$$
$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = v_0$$

y

$$my'' + k^2 y = p_0 \delta(t)$$
$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0.$$

Vamos a probar que ambos problemas tienen la misma solución si $p_0 = mv_0$. La solución del primer problema es inmediata

$$y(t) = A \sin \frac{k}{\sqrt{m}} t + B \cos \frac{k}{\sqrt{m}} t$$

que aplicando las condiciones iniciales nos da

$$y(t) = \frac{v_0 \sqrt{m}}{k} \sin \frac{k}{\sqrt{m}} t.$$

Para encontrar la solución del segundo problema aplicamos T. de L.

$$ms^2 Y(s) + k^2 Y(s) = p_0$$

$$Y(s) = \frac{p_0}{ms^2 + k^2} = \frac{p_0}{k\sqrt{m}} \frac{\frac{k}{\sqrt{m}}}{s^2 + (\frac{k}{\sqrt{m}})^2}. \tag{1.16}$$

De aqui, usando que $p_0 = mv_0$, obtenemos

$$y(t) = \frac{p_0}{k\sqrt{m}} \sin(\frac{k}{\sqrt{m}} t) = \frac{v_0\sqrt{m}}{k} \sin(\frac{k}{\sqrt{m}} t).$$

Volvamos ahora al problema

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t) \tag{1.17}$$

con las condiciones iniciales

$$y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_n,$$

y donde g es una función que admite T. de L. , con

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \quad y \quad c_0, \ldots, c_n \text{ constantes reales.}$$

Vimos que aplicando la T. L. a ambos miembros nos daba

$$P(s)Y(s) + Q(s) = G(s).$$

donde

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

(polinomio característico) y $Q(s)$ es un polinomio de grado s^{n-1} en s, función de las condiciones iniciales. Despejando $Y(s)$, se obtiene

$$Y(s) = \frac{G(s) - Q(s)}{P(s)} = \frac{G(s)}{P(s)} - \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

Vamos a suponer que las condiciones iniciales son todas cero, esto implica que $Q(s) = 0$, por lo que

$$Y(s) = W(s)G(s),$$

donde $W(s) = \dfrac{1}{P(s)}$. La función W se llama función de transferencia. Si ponemos

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}(W(s))$$

entonces

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = (w * g)(t) = \int_0^t w(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{1.18}$$

Una notación corriente en Ingenieria es llamar a la función $g(t)$, función de entrada del sistema e $y(t)$ respuesta o salida del sistema. La función $w(t)$ se llama función peso del sistema y depende solamente de los coeficientes $a_0, \cdots, a_n$. En este contexto (1.18) se llama la formula de Duhamel.

Volvamos ahora a la formula

$$Y(s) = W(s)G(s),$$

y supongamos que $G(s) = 1$, entonces

$$Y(s) = W(s), \tag{1.19}$$

que corresponde a la T. de L. de la respuesta $y(t) = w(t) = \mathcal{L}^{-1}(W(s))$ del siguiente problema

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \delta(t) \tag{1.20}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = 0. \tag{1.21}$$

Es por esto que $w(s)$ también se le llama la respuesta a un impulso unitario.

Miremos ahora el siguiente problema. Supongamos que sabemos que un fenómeno de Ingenieria es modelado por una ecuación de la forma (1.17), pero no conocemos las constantes $a_0, \cdots, a_n$. La pregunta es si se puede determinar la función peso del sistema por medio de excitaciones convenientes. Procedemos de la siguiente forma: tomamos $g(t) = U(t)$, y consideremos el siguiente problema

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = U(t)$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Sabemos que en este caso $G(s) = \mathcal{L}(U(t)) = \dfrac{1}{s}$ y por lo tanto

$$Y_U(s) = \frac{W(s)}{s}.$$

Tomando transformada inversa y llamando $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_U(s))$ la respuesta a la excitación $U(t)$ se tiene

$$h(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau,$$

y por lo tanto $w(t) = h'(t)$, quedando entonces determinada la función peso si se conoce $h'(t)$.

Con esto, de (1.18), la respuesta a una función g general es dada por

$$y(t) = \int_0^t h'(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Ejercicio. Sea $f : [0, \infty) \mapsto \infty$ definida por

$$f(t) = n \quad \text{si} \quad n-1 < t \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Encuentre la T. de L. de esta función y después resuelva la ecuación

$$y'' + k^2 y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Empecemos evaluando la T. de L. de f. Se tiene que esta función se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U(t-n).$$

Aplicando T. de L. se tiene

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(U(t-n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-sn}}{s} = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn}.$$

Sea $S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn}$, entonces

$$e^{-s}S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s(n+1)},$$

y por lo tanto

$$S - e^{-s}S = 1,$$

de donde

$$S = \frac{1}{1-e^{-s}},$$

y finalmente

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s(1-e^{-s})}.$$

Para resolver la ecuación diferencial usamos T. de L.. Se tiene

$$(s^2+k^2)Y(s) = \frac{1}{s(1-e^{-s})},$$

de donde

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+k^2)(1-e^{-s})} = \frac{1}{(s^2+k^2)}\frac{1}{s(1-e^{-s})} = \frac{1}{k}\mathcal{L}(\sin kt)\mathcal{L}(f(t)).$$

Tomando transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\sin(k(t-\tau))d\tau.$$

Reemplazando la serie para $f(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{1}{k}\int_0^t \sin(k(t-\tau))\sum_{n=0}^{\infty} U(\tau-n)d\tau$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t \sin(k(t-\tau))U(\tau-n)d\tau.$$

Termine este problema evaluando la integral y dando una formula para $y(t)$.

Vamos a resolver este problema de otra forma, para ilustrar nuestros métodos. Considerando el problema

$$w'' + k^2 w = \delta(t), \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0,$$

sabemos de (1.16) que la T. de L. es

$$W(s) = \frac{1}{s^2+k^2},$$

de donde

$$w(t) = \frac{1}{k}\sin kt.$$

De aquí y de la formula de Duhamel

$$y(t) = \frac{1}{k}\int_0^t \sin k\tau f(t-\tau)d\tau = \frac{1}{k}\int_0^t \sin k(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

y hemos vuelto a la formula obtenida antes.

Ejercicio. Consideremos el siguiente problema

$$y' = \delta(t-a), \quad y(0) = 0, \quad a \geq 0.$$

Aplicando T. de L.

$$sY(s) = e^{-sa},$$

de donde

$$Y(s) = \frac{e^{-sa}}{s}.$$

Tomando transformada inversa

$$y(t) = U(t-a).$$

Formalmente

$$\frac{d}{dt}U(t-a) = \delta(t-a).$$

Esta formula no tiene sentido aquí, pero si en teoría de distribuciones. Sin embargo si uno aplica T. de L. a ambos miembros obtiene una identidad.

A manera de introducción a nuestra próximo sección consideremos el siguiente problema.

Ejercicio. Resuelva, usando T. de L., el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1' &= 10x_1 - 5x_2 \\ x_2' &= 8x_1 - 12x_2. \end{aligned}$$

Aplicamos T. de L. a cada ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1'(t)) &= sX_1(s) - x_1(0) = 10X_1(s) - 5X_2(s) \\ \mathcal{L}(x_2'(t)) &= sX_2(s) - x_2(0) = 8X_1(s) - 12X_2(s), \end{aligned}$$

que se escribe como

$$(s-10)X_1(s)+5X_2(s)=x_1(0)$$
$$-8X_1(s)+(s+12)X_2(s)=x_2(0).$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$X_1(s)=\frac{(s+12)x_1(0)-5x_2(0)}{(s-10)(s+12)+40},$$

$$X_2(s)=\frac{8x_1(0)+(s-10)x_2(0)}{(s-10)(s+12)+40}.$$

Notando que $(s-10)(s+12)+40=s^2+2s-80=(s-8)(s+10)$ el sistema lo podemos escribir como

$$X_1(s)=\frac{x_1(0)(s+12)}{(s-8)(s+10)}-\frac{5x_2(0)}{(s-8)(s+10)},$$

$$X_2(s)=\frac{8x_1(0)}{(s-8)(s+10)}+\frac{x_2(0)(s-10)}{(s-8)(s+10)}.$$

Usando fracciones parciales

$$X_1(s)=x_1(0)(\frac{10}{9(s-8)}-\frac{1}{9(s+10)})-\frac{5x_2(0)}{18}(\frac{1}{s-8}-\frac{1}{s+10}),$$

y agrupando

$$X_1(s)=(\frac{10x_1(0)}{9}-\frac{5x_2(0)}{18})\frac{1}{s-8}-(\frac{x_1(0)}{9}-\frac{5x_2(0)}{18})\frac{1}{s+10}.$$

Tomando transformada inversa

$$x_1(t)=(\frac{10x_1(0)}{9}-\frac{5x_2(0)}{18})e^{8t}-(\frac{x_1(0)}{9}-\frac{5x_2(0)}{18})e^{-10t}.$$

El resto de ejercicio.