MA26A, Auxiliar 4, 5 de Abril, 2007

Profesor Cátedra: Raúl Manasevich

Profesor Auxiliar : Alfredo Núnez

1. Ecuaciones lineales de orden n.

1.1. Usando el método de variación de parámetro resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y''' + y' = \tan(t) \tag{1.1}$$

Solución:

En primer lugar se resuelve ecuación homogenea:

$$y''' + y' = 0$$

Disminuyendo el orden de la ecuación
diferencial realizando un cambio de variable:
$y' = \Upsilon \rightarrow y''' = \Upsilon''$. Entonces la ecuación (1.1)se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Upsilon'' + \Upsilon = \tan(t)$$

Ahora resolvemos la homogenea de nuestra nueva ecuación:

$$\Upsilon'' + \Upsilon = 0 \tag{1.2}$$

Se prueba con soluciones del tipo: $\Upsilon(x) = e^{mt}$, $\rightarrow \Upsilon' = me^{mt}$, $\Upsilon'' = m^2 e^{mt}$ reemplazando estos términos en la ecuaciíon (1.2)se obtiene:

$$(m^2 + 1)\Upsilon = 0$$

$$p(m) = (m^2 + 1) = 0$$

se obtienen los valores $m_1 = i$ y $m_1 = -i$, con lo cual se llega a dos soluciones;

$$\Upsilon_1 = i, \qquad \Upsilon_2 = -i$$

Luego la solución de la ecuación homogenea esta dada por la siguiente función:

$$\Upsilon_h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

Se aplica el método de variación de parametros para obtener la solución particular:

$$\Upsilon_p = u_1 \Upsilon_1 + u_2 \Upsilon_2 \tag{1.3}$$

$$W(\Upsilon_1, \Upsilon_2) = \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$$

$u_1(t) = -\int \frac{\sin(t)\tan(t)}{1} dt = \int \tan(t)\sin(t) dt$

$u_1(t) = \sin(t) - \ln(\sec(t) + \tan(t))$

$u_2(t) = \int \cos(t)\tan(t) dt$

$u_2(t) = -\cos(t)$

$$\Upsilon_p(t) = u_1 \cos(t) + u_{(t)} \sin(t) = -\cos(t)\ln(\sec(t) + \tan(t)) \tag{1.4}$$

Luego la solución general de nuestro problema inicial

es:

$$Y_g(t) = c_1 \int \cos(t) dt + c_2 \int \sin(t) + c_3 + \int \Upsilon(t) dt$$

Esto es equivalente a:

$$Y_g(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + c_3 + \int \cos(t)\ln(\sec(t) + \tan(t)) dt$$

1.2. Encuentre la homogenea y plantee la forma de la solución particular.

$$y^{(iv)} + 4y'' + 16y = e^t \cdot \cos\sqrt{3} \cdot t$$

Solución:

$$p(m) = m^4 + 4m^2 + 16 = 0$$

$$m^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3} \cdot i}{2} = -2 \pm 2\sqrt{3} \cdot i$$

$$m^2 = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} \cdot e^{\pm i \cdot arctg(\frac{-2}{2\sqrt{3}})} = 4 \cdot e^{i \cdot 120}$$

$$m = \pm\sqrt{4} \cdot e^{\pm i \cdot \frac{120}{2}}$$

$$m = \pm 2 \cdot e^{\pm i \cdot 60}$$

$$m = \pm 2(cos60 \pm i \cdot sen60)$$

$$m = \pm 2(0{,}5 \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$m_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$m_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$y_h(t) = e^t(C_1 \cdot cos(\sqrt{3} \cdot t) + C_2 \cdot sen(\sqrt{3} \cdot t)) + e^{-t}(C_3 \cdot cos(\sqrt{3} \cdot t) + C_4 \cdot sen(\sqrt{3} \cdot t))$$

$$y_p(t) = d_1 \cdot te^t \cdot cos(\sqrt{3} \cdot t) + d_2 \cdot te^t \cdot sen(\sqrt{3} \cdot t)$$

1.3. Encuentre la homogenea y plantee la forma de la solución particular.

$$y'' + ky = e^{\sqrt{|k|}} \cdot t$$

$$p(m) = m^2 + k = 0$$

caso 1 :

$$k > 0 \Rightarrow m = \pm i \cdot \sqrt{k} \Rightarrow y(t) = C_1 \cdot cos\sqrt{k} \cdot t + C_2 \cdot sen\sqrt{k} \cdot t + d \cdot e^{\sqrt{k} \cdot t}$$

caso 2 :

$$k = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y(t) = C_1 + C_2 \cdot t + d \cdot e^{\sqrt{k} \cdot t}$$

caso 3 :

$$k < 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{-k} \Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{\sqrt{-k} \cdot t} + C_2 \cdot e^{\sqrt{-k} \cdot t} + d \cdot t \cdot e^{\sqrt{|k|} \cdot t}$$

1.4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y^{(v)} + 8a^3 y'' = a + e^{at} \cos{(at)} \tag{1.5}$$

Solución:

En primer lugar se resuelve ecuación homogenea:

$$y^{(v)} + 8a^3 y'' = 0$$

El polinomio característico asociado resulta ser $p(m) = m^5 + 8a^3 m^2$, cuyas raíces son:

$$m_1 = m_2 = 0, m_3 = -2a, m_4 = a + a\sqrt{3}i, m_5 = a - a\sqrt{3}i$$

Entonces la base de la solución homogenea está dada por:

$$\{1, t, e^{-2at}, e^{at} \cos{(a\sqrt{3}t)}, e^{at} \sin{(a\sqrt{3}t)}\}$$

Luego la solución homogenea de la ecuación es:

$$Y_h = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2at} + c_4 e^{at} \cos{(a\sqrt{3}t)} + c_5 e^{at} \sin{(a\sqrt{3}t)} \tag{1.6}$$

donde c_i con $i = 1, 2, 3, 4, 5$ son constantes.

Lo siguiente es encontrar la forma de la solución particular. polinomio anulador de la función $f(t) = a + e^{at}\cos{(at)}$, es:

$$D(D^2 - 2aD + 2aI)$$

Aplicando a (1.5), resulta

$$D^2(D + 2aI)(D^2 - 2aD + 4a^2I)D(D^2 - 2aD + 2a^2I)y(t) = 0$$

cuya solución es:

$$Y(t) = c_1 + c_2t + c_3e^{-2at} + c_4e^{at}\cos{(a\sqrt{3}t)}$$

$$+c_5e^{at}\sin{(a\sqrt{3}t)} + c_6e^{at}\cos{(at)} + c_7e^{at}\sin{(at)} + c_8t$$

donde $c_i, i = 1, ..., 8$ son constantes.

Al sacar de esa solución las pertenecientes a la homogenea, la forma de la solución particular es:

$$Y_p(t) = c_6e^{at}\cos{(at)} + c_7e^{at}\sin{(at)} + c_8t^2 \tag{1.7}$$

donde c_6, c_7, c_8 son los coeficientes indeterminados.

Se evalúa la solución particular en la ecuación (1.5). Para aquello se calcula:

$$Y_p''(t) = -2c_6e^{at}\sin{(at)} + 2c_7e^{at}\cos{(at)} + 2c_8$$

$$Y_p^{(5)}(t) = -4(c_6 + c_7)a^5e^{at}\cos{(at)} + -4(c_6 - c_7)a^5e^{at}\sin{(at)}$$

Al remplazar en la ecuación (1.5, se obtienen los valores de las constantes c_6, c_7 y c_8:

$$c_6 = -\frac{1}{40a^5}, c_7 = \frac{3}{40a^5}, c_8 = \frac{1}{16a^2}$$

Finalmente la solución de la ecuación (1.5) es:

$$Y(t) = c_1 + c_2t + c_3e^{-2at} + c_4e^{at}\cos{(a\sqrt{3}t)} + c_5e^{at}\sin{(a\sqrt{3}t)}$$

$$-\frac{e^{at}\cos{(at)}}{40a^5} + \frac{3e^{at}\sin{(at)}}{40a^5} + \frac{1}{16a^2}t^2$$

1.5. Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y^{(iv)} - y = \exp(t) + \cos(t) \tag{1.8}$$

Solución:

En primer lugar se resuelve ecuación homogenea:

$$y^{(iv)} - y = 0$$

El polinomio característico asociado resulta ser: $p(m) = m^4 - 1$,
cuyas raíces son:

$$m_1 = 1, m_2 = -1, m_3 = i, m_4 = -i$$

Entonces la base de la solución homogenea está dada por:

$$\{e^t, e^{-t}, e^{it}, e^{-it}\}.$$

Luego la solución homogenea de la ecuación es:

$$Y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{it} + c_4 e^{-it} \tag{1.9}$$

pero como se sabe que $\exp(\pm it) = \cos(t) \pm i \sin(t)$,
entonces (1.9) se puede escribir de la siguiente forma:

$$Y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) \tag{1.10}$$

donde $c_i, i = 1, .., 4$ son constantes.
Lo siguiente es encontrar la forma de la solución particular. Para esto se debe encontrar el polinomio anulador de la función $f(t) = \exp(t) + \cos(t)$,
el cual es: $(D - I)(D^2 + I)$. Al aplicar el anulador a la ecuación (1.8) se obtiene:

$$(D - I)(D^2 + I)(D^4 - I)y(t) = 0.$$

luego se resuelve

$$p(D) = (D - I)(D^2 + I)(D^4 - I)y(t) = 0$$

con lo que se obtiene:

$$Y_n(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 \cos(t) + c_5 t \cos(t) + c_6 \sin(t) + c_7 t \sin(t)$$

donde $c_i, i = 1, .., 7$ son constantes. La solución particular se obtiene a partir de $Y_p = Y_n - Y_h$

$$Y_p(t) = c_5 t e^t + c_6 t \cos(t) + c_7 t \sin(t) \tag{1.11}$$

A continuación se calcula $Y_p^{(iv)}$.

$$Y_p^{(4)} = 4c_5e^t + c_5te^t + 4c_6\sin(t) - c_6t\cos(t) + c_7t\sin(t)$$

$Y_p^{(4)}$ se reemplazan en la ecuación (1.8)

De aquí se obtienen los valores de las constantes

$$c_5 = \frac{1}{4}, c_6 = 0, c_7 = -\frac{1}{4}$$

luego, el resultado de la ecuación (1.11) es:

$$Y_p(t) = \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}t\sin(t)$$

Finalmente la solución general del problema es:

$$Y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos(t) + c_4\sin(t) + \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}t\sin(t) \tag{1.12}$$

1.6. Usando el método de coeficientes inderminados resuelva la siguiente ecuación diferencial, analizando los posibles valores que puede tomar la constante w.

$$z'' + wz = t\cos(\sqrt{w}t) \tag{1.13}$$

Existen tres posibles casos a estudiar

1. $w > 0$

$$Z_h(t) = c_1\cos(\sqrt{w}t) + c_2\sin(\sqrt{w}t) \tag{1.14}$$

2. $w = 0$

$$Z_h(t) = c_1 + c_2t \tag{1.15}$$

3. $w < 0$

$$Z_h(t) = c_1e^{\sqrt{w}t} + c_2e^{-\sqrt{w}t}$$

pero este caso es infactible puesto que $t\cos(\sqrt{w}t)$ sería complejo.

solución caso 1:

$$(D^2+w)z = t\cos(\sqrt{w}t)$$

el anulador de la función $g(t) = t\cos(\sqrt{w}t)$ es $(D^2+w)^2$

Entonces:

$$(D^2+w)^3 z = 0$$

Se encuentran las raíces del polinomio

$$p(D) = (D^2+w)^3$$

$D_1 = i\sqrt{w}$ con multiplicidad tres.

$D_2 = -i\sqrt{w}$ con multiplicidad tres.

la base de solución es:

$$\{cos(\sqrt{w}t), cos(\sqrt{w}t)t, cos(\sqrt{w}t)t^2, sin(\sqrt{w}t), sin(\sqrt{w}t)t, sin(\sqrt{w}t)t^2\}$$

Luego la solución particular está dada por:

$$Z_p(t) = cos(\sqrt{w}t)(c_1 + c_2t + c_3t^2) + sin(\sqrt{w}t)(c_4 + c_5t + c_6t^2$$

Pero se deben extraer las soluciones que ya estaban en la solución homogenea (1.15). Entonces la solución particular es:

$$Z_p(t) = cos(\sqrt{w}t)(+c_2t + c_3t^2) + sin(\sqrt{w}t)(+c_5t + c_6t^2$$

Se debe obtener $Z_p''(t)$ para luego reemplazar en (1.13) y así
determinar los coeficientes inderminados

$$z_p(t)'' = (2c_2 + 2c_5\sqrt{w} + 4c_6\sqrt{w}t - c_2wt - c_3wt^2)cos(\sqrt{w}t)$$
$$+(-2c_2\sqrt{w} + 2c_6 - 4c_3\sqrt{w}t + c_5wt - c_6wt^2)sin(\sqrt{w}t)$$

Entonces al reemplazar $z_p(t)''$ y $z_p(t)$ en (1.13)

$$z_p(t)''+wz_p(t) = (2c_2+2c_5\sqrt{w}+4c_6\sqrt{w}t)cos(\sqrt{w}t)+(-2c_2\sqrt{w}+2c_6-4c_3\sqrt{w}t)sin(\sqrt{w}t)$$

$$z_p(t)'' + wz_p(t) = t\cos(\sqrt{w}t)$$

igualando los coeficientes respectivos se llega a:

$2c_3 + 2c_5\sqrt{w} = 0, \qquad -2c_2\sqrt{w} + 2c_6 = 0$

$4c_6\sqrt{w} = 1, \qquad -4c_3\sqrt{w} = 0$
los coefiecientes indeterminados del caso 1 son:

$$c_2 = \frac{1}{4w}, \qquad c_3 = 0, c_5 = 0, \qquad c_6 = \frac{1}{4\sqrt{w}}$$

la solución general del caso $w > 0$ es :

$$Z_g(t) = c_1cos(\sqrt{w}t) + c_2sin(\sqrt{w}t) + \frac{1}{4w}tcos(\sqrt{w}t) + \frac{1}{4\sqrt{w}}t^2sin(\sqrt{w}t)$$

Solución caso 2:

A partir de (1.15), como $w = 0$, entonces

$$z(t)'' = t$$

Integrando dos veces $z(t)''$ se obtiene la solución

$$z(t)' = \frac{t^2}{2} + c_1$$

$$z(t) = \frac{t^3}{6} + c_1t + c_2$$

1.7. Encuentre la solución de la ecuación:

$$sin(x)^2y'' - 3sin(x)cos(x)y' + (1 + 2cos(x)^2)y = 3cos(x) \tag{1.16}$$

En primer lugar resolvemos la ecuación homogenea:

$$sin(x)^2y'' - 3sin(x)cos(x)y' + (1 + 2cos(x)^2)y = 0 \tag{1.17}$$

Se prueba con una función trigonométrica,

$y_h = cos(x) \Rightarrow y(t)' = -sin(x)$, $y(t)'' = -cos(x)$

Se reemplaza en la ecuación (1.17):

$$-sin(x)^2cos(x) + 3sin(x)^2cso(x) + cos(x) + 2cos(x)^3 = 0$$

$$2cos(x)[sin(x)^2 + cos(x)^2) + cos(x) = 0$$

$3cos(x) = 0, \quad \rightarrow \leftarrow$(contradicción)

luego $y(t) = cos(x)$ no es base de la solución homogenea, pero es la solución de la particular, luego $y_p = cos(x)$

Se prueba con $y_h = sin(x) \Rightarrow y_h' = cos(x)$, $y_h'' = -sin(x)$

Se reemplaza en la ecuación (1.17):

$$-sin(x)^3 - 3sin(x)cos(x)^2 + sin(x) + 2cos(x)^2sinx = 0$$

$$-sin(x)^3 - sin(x)cos^2 + sin(x) = 0$$

$$-sin(x)[sin(x)^2 + cos(x)^2] + sin(x) = 0$$

luego $y_1(x) = sin(x)$

entonces

$$y(x)'' - 3\frac{cos(x)}{sin(x)}y(x)' + \left\{\frac{1}{sin(x)^2} + 2\frac{cos(x)^2}{sin(x)^2}\right\}y(x) = 0$$

$\Rightarrow \quad y_2(x) = sin(x)\int \frac{1}{sin(x)^2}e^{3\int cot(x)dx}dx$

$$\int \frac{cos(x)}{sin(x)}dx = \int \frac{1}{u}du = ln(u) = ln[sin(x)]$$

$$u = sin(x) \quad \Rightarrow \quad du = cos(x)dx$$

$$y_2(x) = sin(x)\int \frac{1}{sin(x)^2}e^{3ln[sin(x)]}dx = sin(x)\int \frac{sin(x)^3}{sin(x)^2}dx = sin\int sin(x)dx$$

$$y_2(x) = -sin(x)cos(x)$$

Finalmente se obtiene la solución general:

$$y(x) = c_1 sin(x) + c_2 sin(x)cos(x) + cos(x)$$