

## 1. PAUTA TAREA 1 2007 MA26A.

1.1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a)  $y' = \frac{y}{x(\ln(y) - \ln(x) + 1)}, y(1) = e$

b)  $y' = 1 + e^{y-x+5}$

c)  $y'' = \frac{\cos(t)}{y'e^{y'^2} + 1}$

Además en este caso a partir de la expresión encontrada para  $y'$  demuestre que se puede resolver para  $y'$  en forma única.

Solución:

La ecuación a) se puede escribir como:

$$y' = \frac{y}{x \ln\left(\frac{y}{x}\right) + 1}$$

Aplicando el cambio de variable:  $y = ux$ ,  $y' = u'x + u$  resulta:

$$u'x + u = \frac{u}{\ln(u) + 1}$$

Que es una EDO del tipo Variables Separables.

$$u' = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{u} - \frac{1}{u \ln(u)}} = \frac{g(x)}{h(u)}$$

Se integra y se obtiene:

$$G(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$H(u) = - \int \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{u \ln(u)} \right) du = -\ln(u) - \ln(\ln(u)) = \ln\left(\frac{1}{u \ln(u)}\right)$$

Por lo tanto:

$$\ln\left(\frac{1}{u \ln(u)}\right) = \ln(x) + C$$
$$\frac{1}{u \ln(u)} = cx$$

1

Se regresa a la variable inicial y queda:

$$y(x) \ln\left(\frac{y(x)}{x}\right)c = 1$$

La condición inicial  $y(1) = e$  permite obtener  $c = e^{-1}$ , por lo que la solución del problema con condición inicial es:

$$y(x) \ln\left(\frac{y(x)}{x}\right) = e$$

b) Para la segunda pregunta, se realiza el cambio de variable:  $u = y - x + 5$ ,  $u' = y' - 1$ .

$$u' = e^u$$

La cual es de variables separables.

$$e^{-u} = -x + c$$

$$-u = \ln(-x + c)$$

Y regresando a la variable inicial:

$$y(x) = x - 5 - \ln(c - x)$$

c) La ecuación c) es de variables separables. Luego de integrar resulta:

$$e^{y'^2} + 2y' = 2\sin(t) + C$$

Para demostrar que esta EDO se puede resolver para  $y'$  de manera única se debe analizar el término  $e^{y'^2} = -2y'$  el cual se puede resolver para  $y'$  de manera única debido a que la recta  $-2y'$  intersecta a la función  $e^{y'^2}$  en un solo punto.

**1.2.** Considere el problema con condición inicial:

$$(1 + x^2)y' + 2xy = f(x), y(1) = e$$

donde:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \in [0, 1) \\ -x & \text{para } x \geq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Encuentre una solución continua, (no de clase  $C^1$ ) de este problema. Evalúe  $y'(1_+)$ ,  $y'(1_-)$  y demuestre que  $y'(1_+) - y'(1_-) = -1$ .

Solución:

Si  $x \in [0, 1)$ :

$$y_1' + \frac{2x}{1+x^2}y_1 = \frac{x}{1+x^2}$$

La cual es una EDO lineal. El factor integrante es:  $1+x^2$ . Al multiplicar por el factor integrante resulta:

$$\frac{d((1+x^2)y_1)}{dx} = x$$

$$(1+x^2)y_1 = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{c_1}{1+x^2}$$

Esta solución es válida en  $x \in [0, 1)$ , por lo que se puede aplicar la condición inicial  $y_1(0) = 0$ , resultando  $c_1 = 0$ , y por lo tanto:

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2(1+x^2)}$$

Si  $x \in [1, \infty)$ :

$$y_2' + \frac{2x}{1+x^2}y_2 = \frac{-x}{1+x^2}$$

La cual es una EDO lineal. El factor integrante es:  $1+x^2$ . Al multiplicar por el factor integrante resulta:

$$\frac{d((1+x^2)y_2)}{dx} = -x$$

$$(1+x^2)y_2 = \frac{-x^2}{2} + c_2$$

$$y_2(x) = \frac{-x^2}{2(1+x^2)} + \frac{c_2}{1+x^2}$$

Esta solución es válida en  $x \in [1, \infty)$ .  $c_2$  se obtiene aplicando la condición de continuidad de las soluciones:  $y_1(1) = y_2(1)$ , resultando  $c_2 = 1$ , y por lo tanto:

$$y_2(x) = \frac{-x^2 + 2}{2(1+x^2)}$$

En resumen:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2(1+x^2)} & \text{para } x \in [0, 1) \\ \frac{-x^2+2}{2(1+x^2)} & \text{para } x \geq 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

De la EDO se obtiene que:

$$y'(x) = \frac{f(x) - 2xy(x)}{1 + x^2}$$

Evaluable en  $1+$  y en  $1-$  se tiene:

$$y'(1+) = \frac{-1 - 2y(1+)}{2} = \frac{-1 - 2\frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$y'(1-) = \frac{1 - 2y(1-)}{2} = \frac{-1 - 2\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$y'(1+) - y'(1-) = -1$$

**1.3.** Mediante sustituciones adecuadas resuelva la EDO no lineal:

$$y' - 4y \ln y + 2ty(\ln y)^3 = 0$$

y encuentre la solución que satisface  $y(0) = e^{-\frac{1}{4}}$ . Demuestre que el dominio de definición de esta solución incluye el intervalo  $[0, \infty)$ . Sugerencia. Transforme primero la ecuación en otra no lineal pero conocida.

Solución:

Se aplica el cv  $u = \ln(y)$ ,  $u' = y^{-1}y'$  y resulta la EDO del tipo Bernoulli:

$$u' - 4u + 2tu^3 = 0$$

$$u^{-3}u' - 4u^{-2} = -2t$$

Se aplica el cv  $u^{-2} = w$ ,  $-2u^{-3}u' = w'$  y resulta la EDO lineal:

$$w' + 8w = 4t$$

Cuya solución es:

$$w(t) = ce^{-8t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{16}$$

Regresando a la variable inicial:

$$u(t) = \frac{1}{\pm \sqrt{ce^{-8t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{16}}}$$

$$y(t) = e^{u(t)} = e^{\pm \sqrt{ce^{-8t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{16}}} = e^{\pm \sqrt{c'e^{-8t} + 8t - 1}}$$

La condición inicial  $y(0) = e^{-\frac{1}{4}}$ , impone que de ambas soluciones posibles ( $\pm$  la raíz cuadrada), se deba elegir aquella con raíz de signo  $-$ . La constante toma el valor:  $c' = 257$  y finalmente la solución al problema con condición inicial:

$$y(t) = e^{-\frac{4}{\sqrt{257e^{-8t} + 8t - 1}}}$$

**1.4.** La ecuación diferencial:

$$\frac{dP'}{dt} = P(a - b \ln(P))$$

se utiliza en el pronóstico de crecimiento de poblaciones. En esta ecuación  $a > 0$  y  $b$  son constantes.

- Encuentre la solución de esta ecuación en términos de  $a$ ,  $b$ ,  $P(0) = P_0$  y  $t$ .
- Describa el comportamiento de  $P(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$

Solución:

La EDO es del tipo variables separables:

$$\frac{dP}{dt} = P' = \frac{1}{\frac{1}{P(a - b \ln(P))}} = \frac{g(t)}{h(P)}$$

Integrando se tiene que:

$$G(t) = \int_0^t dt = t$$

$$H(P(t)) = \int_{P_0}^{P(t)} \frac{1}{P(a - b \ln(P))} dP = -\frac{1}{b} \ln\left(\frac{a - b \ln(P(t))}{a - b \ln(P_0)}\right)$$

$$H(P(t)) = G(t)$$

Despejando:

$$P(t) = e^{\frac{a}{b} - \frac{e^{-bt}}{b}(a - b \ln(P_0))}$$

- Por enunciado  $P_0 > 0$ ,  $a > 0$ . Entonces hay dos casos por analizar:  $b < 0$  y  $b > 0$ .

En el caso que  $b > 0$ , se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{a}{b} - \frac{e^{-bt}}{b}(a - b \ln(P_0))} = e^{\frac{a}{b} - \frac{(a - b \ln(P_0))}{b}} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-bt} = e^{\frac{a}{b}}$$

En el caso que  $b < 0$ , se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{a}{b} - \frac{e^{-bt}}{b}(a - b \ln(P_0))} = e^{\frac{a}{b} - \frac{(a - b \ln(P_0))}{b}} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-bt}$$

Hay dos casos entonces:  $(a - b \ln(P_0)) > 0$  y  $(a - b \ln(P_0)) < 0$ .

Si se cumple que  $(a - b \ln(P_0)) > 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \infty$$

Si se cumple que  $(a - b \ln(P_0)) < 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0$$

**1.5.** Considere la EDO:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

donde  $p, q : I \rightarrow R$  son dos funciones continuas que se pide determinar bajo la condición de que:

$$y_1(t) = \sin(t^2), y_2(t) = \cos(t^2)$$

formen una base de soluciones de esta ecuación. Determine claramente los intervalos reales  $I$  donde este problema admite solución.

Solución:

Para obtener  $p(t)$  y  $q(t)$  se evalúa  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  en la EDO, obteniéndose un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas:

$$2tp(t)\cos(t^2) + q(t)\sin(t^2) = 4t^2\sin(t^2) - 2\cos(t^2)$$

$$-2tp(t)\sin(t^2) + q(t)\cos(t^2) = 4t^2\cos(t^2) + 2\sin(t^2)$$

Despejando se obtiene:  $p(t) = -\frac{1}{t} q(t) = 4t^2$ . Los intervalos donde la EDO admite solución son  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ .

**1.6.** Considere la ecuación de Clairaut:

$$y = ty' - \frac{1}{4}(y')^2$$

Demuestre que  $y(t) = Ct - \frac{1}{4}C^2$  es una solución uniparamétrica de esta ecuación.

Encuentre cual de las siguientes funciones:  $y(t) = t^2$ ,  $y(t) = t^3$ ,  $y(t) = e^t$ , es una solución de la ecuación diferencial. Indique cual es la relación geométrica entre las soluciones.

Solución:

Se evaluó la función en la EDO y resulta:

$$ty' - \frac{1}{4}(y')^2 - y = tC - \frac{1}{4}(C)^2 - tC + \frac{1}{4}(C)^2 = 0$$

Por lo tanto la función con parámetro  $C$  es una solución de la EDO.

Para encontrar cuales de las funciones son también solución, se evalúa en la EDO de manera similar:

$$t(t^2)' - \frac{1}{4}((t^2)')^2 - (t^2) = 2t^2 - t^2 - t^2 = 0$$

Por lo tanto  $y(t) = t^2$  es solución.

$$t(t^3)' - \frac{1}{4}((t^3)')^2 - (t^3) = 3t^3 - \frac{9}{4}t^3 - t^3 = \frac{1}{4}t^3$$

Por lo tanto  $y(t) = t^3$  no es solución de la EDO.

$$t(e^t)' - \frac{1}{4}((e^t)')^2 - (e^t) = 2e^t - \frac{1}{4}e^{2t} - e^t \neq 0$$

Por lo tanto  $y(t) = e^t$  no es solución de la EDO.

Finalmente, el lugar geométrico de las soluciones de esta EDO es el de las rectas tangentes a la parábola  $t^2$ .