MA26A, Auxiliar 3, 29 de Marzo, 2007

Profesor Cátedra: Raúl Manasevich

Profesor Auxiliar : Alfredo Núnez

1. Ecuaciones lineales de orden n.

1.1. Usando el método de variación de parámetro resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2y'' + xy' - 4y = 4x^2 \tag{1.1}$$

Solución:

En primer lugar se resuelve ecuación homogenea:

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0 \tag{1.2}$$

Se prueba con soluciones del tipo: $y_h(x) = x^\alpha$,$y_h' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y_h'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

remplazando en (1.2) se obtiene:

$$[\alpha(\alpha-1) + \alpha - 4]y_h = 0$$

$$p(\alpha) = [\alpha(\alpha-1) + \alpha - 4] = 0$$

se obtienen los valores $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_1 = -2$ con lo cual se llega a dos soluciones; $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^{-2}$
A partir de estas dos soluciones se obtiene la solución homogenea que esta dada por:

$$Y_h = c_1x^2 + c_2x^{-2} \tag{1.3}$$

Se aplica el método de variación de parametros para obtener la soluión particular :

$$Y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \tag{1.4}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -4x^{-1}$$

$$u_{(1)}x = \int \frac{4x^{-2}}{4x^{-1}}dx = \int x^{-1}dx = \ln(x)$$

$$u_{(2)}x = \int \frac{4x^{2}}{-4x^{-1}}dx = -\int xdx = \frac{-x^{2}}{2}$$

luego la solución de la particular es:

$$Y_p = x^2\ln(x) - \frac{-x^2}{2}x^{-2} = x^2\ln(x) + C$$

donde C es una constante. Se obtiene la solución general dada por $Y_g = Y_h + Y_p$

$$Y_g = c_1x^2 + c_2x^{-2} + x^2\ln|x|$$

1.2. Usando el método de variación de parámetro resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y''' + y' = \tan(t) \tag{1.5}$$

Solución:

En primer lugar se resuelve ecuación homogenea:

$$y''' + y' = 0$$

Disminuyendo el orden de la ecuación diferencial realizando un cambio de variable: $y' = \Upsilon \rightarrow y''' = \Upsilon''$. Entonces la ecuación (1.5)se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Upsilon'' + \Upsilon = \tan(t)$$

Ahora resolvemos la homogenea de nuestra nueva ecuación:

$$\Upsilon'' + \Upsilon = 0 \tag{1.6}$$

Se prueba con soluciones del tipo: $\Upsilon(x) = e^{mt}$, $\rightarrow \Upsilon' = me^{mt}$, $\Upsilon'' = m^2e^{mt}$ reemplazando estos términos en la ecuaciíon (1.6)se obtiene:

$$(m^2+1)\Upsilon = 0$$

$$p(m) = (m^2+1) = 0$$

se obtienen los valores $m_1 = i$ y $m_1 = -i$, con lo cual se llega a dos soluciones;

$$\Upsilon_1 = i, \qquad \Upsilon_2 = -i$$

Luego la solución de la ecuación homogenea esta dada por la siguiente función:

$$\Upsilon_h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$$

Se aplica el método de variación de parametros para obtener la
solución particular:

$$\Upsilon_p = u_1 \Upsilon_1 + u_2 \Upsilon_2 \tag{1.7}$$

$$W(\Upsilon_1, \Upsilon_2) = \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$$

$u_1(t) = -\int \frac{\sin(t)\tan(t)}{1} dt = \int \tan(t)\sin(t) dt$

$u_1(t) = \sin(t) - \ln(\sec(t) + \tan(t))$

$u_2(t) = \int \cos(t)\tan(t) dt$

$u_2(t) = -\cos(t)$

$$\Upsilon_p(t) = u_1 \cos(t) + u_{(t)} \sin(t) = -\cos(t) \ln(\sec(t) + \tan(t)) \tag{1.8}$$

Luego la solución general de nuestro problema inicial

es:

$$Y_g(t) = c_1 \int \cos(t) dt + c_2 \int \sin(t) + c_3 + \int \Upsilon(t) dt$$

Esto es equivalente a:

$$Y_g(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + c_3 + \int \cos(t) \ln(\sec(t) + \tan(t)) dt$$