MA26A, Auxiliar 2, 22 de Marzo, 2007

Profesor Cátedra: Raúl Manasevich

Profesor Auxiliar : Alfredo Núnez

1. Ecuaciones de primer orden.

1.1. Considere el siguiente problema de Control Óptimo:

$$min\frac{1}{2}x^2(T) + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{5}{4}x^2 + u^2 dt$$

sujeto a :

$$x' = x + u, x(0) = x_0$$

Este problema consiste en encontrar la función $u(t)$ que minimiza el funcional objetivo. Este problema se puede resolver entre otros métodos, mediante Programación Dinámica. En este caso se debe resolver la ecuación en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$v_t + \max_{a\in\Re}((x+a)\nabla_x v - \frac{1}{2}(\frac{5}{4}x^2 + a^2)) = 0$$

Con condición de borde:

$$v(x,T) = -\frac{1}{2}x^2$$

a) Pruebe que la EDP admite soluciones de la forma $K(t)x^2$, donde $K(t)$ es solución de la ecuación de Ricatti: $K' + 2K^2 + 2K - \frac{5}{8} = 0$, con condición final: $K(T) = -\frac{1}{2}$

b)Resuelva la ecuación de Ricatti para $K(t)$ y luego, sabiendo que el control óptimo está dado por $u(t) = 2x(t)K(t)$, encuentre una expresión para la trayectoria óptima $x(t)$.

Solución:

a) Sea $v(x,t) = K(t)x^2$. Entonces las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{dK(t)}{dt}x^2$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 2K(t)x$$

Antes de reemplazar las derivadas parciales, notar que el valor máximo de:

$$\max_{a\in\Re}((x+a)\nabla_x v - \frac{1}{2}(\frac{5}{4}x^2 + a^2))$$

se alcanza cuando $a = \nabla_x v$. Reemplazando esto y las derivadas parciales en la EDP resulta:

$$x^2(\frac{dK(t)}{dt} + 2K(t)^2 + 2K(t) - \frac{5}{8}) = 0$$

La condición de borde entrega la condicin final para la ecuación de Riccati:

$$v(x,T) = K(T)x^2 = -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow K(T) = -\frac{1}{2}$$

b) La EDO de Ricatti es: $\frac{dK(t)}{dt} = -2K(t)^2 - 2K(t) + \frac{5}{8}$

El procedimiento para resolver este tipo de EDO dice que hay que encontrar una solución particular de esta EDO. Debido a que los coeficientes son constantes, se tantea una solución particular de la forma $K_p(t) = C, K_p(t)' = 0$. Para encontrar C se debe resolver la ecuación de segundo orden:

$$2C^2 + 2C - \frac{5}{8} = 0$$

Cuyas raíces son: $C_1 = -\frac{5}{4}$, y $C_2 = \frac{1}{4}$.
Escogiendo $K_p(t) = \frac{1}{4}$, se realiza el cambio de variable:

$$z(t) = K(t) - K_p(t) = K(t) - \frac{1}{4}, \Rightarrow z(t)' = K(t)'$$

La EDO queda ahora del tipo Bernoulli:

$$z' + 3z = -2z^2$$

$$z^{-2}z' + 3z^{-1} = -2$$

Aplicando el cambio de variable $w(t) = z^{-1}, w(t)' = -z^{-2}z'$, resulta la siguiente EDO lineal:

$$w' - 3w = 2$$

La solución de la EDO lineal es:

$$w(t) = Ce^{3t} - \frac{2}{3}$$

La solución de la EDO de Bernoulli es:

$$z(t) = \frac{1}{Ce^{3t} - \frac{2}{3}}$$

La solución de la EDO de Ricatti es:

$$K(t) = \frac{1}{Ce^{3t} - \frac{2}{3}} + \frac{1}{4}$$

Se aplica ahora la condición final $K(T) = -\frac{1}{2}$ y se encuentra la constante de integración $C = -\frac{2}{3}e^{-3T}$. Finalmente la solución del problema de Ricatti con condición terminal es:

$$K(t) = \frac{1}{-\frac{2}{3}(e^{3(t-T)} + 1)} + \frac{1}{4}$$

Se sabe que $u(t) = 2x(t)K(t)$. Al reemplazar esto en la EDO para $x(t)$ resulta la EDO de primer orden lineal homogenea (variables separables) :

$$x(t)' - x(t) = u(t) = 2x(t)K(t)$$

$$x(t)' + (-1 - 2K(t))x(t) = 0$$

Cuya solución es:

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^t (1+2K(t))dt}$$

2. Ecuaciones de segundo orden homogeneas.

2.1. Considere la EDO de segundo orden lineal homogenea:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

a) Demuestre que el $W(t) = W(y_1, y)(t)$ de dos soluciones $y(t)$, $y_1(t)$ de la EDO satisface:

$$W(t) = Ce^{-\int p(t)dt}$$

b) Encuentre a continuación una expresión para $\frac{d}{dt}(\frac{y(t)}{y_1(t)})$ en términos de $W(t)$ e $y_1(t)$. A partir de aquí y de a) encuentre finalmente $y(t)$ en términos de $y_1(t)$.

c) Ocupando la parte anterior, resuelva la siguiente EDO:

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

Sabiendo que $y(x) = -x$ es solución de la EDO.

Solución:
a) Se sabe que $y(t), y_1(t)$ son soluciones de la EDO de segundo orden. Entonces se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

$$y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$$

Al multiplicar la primera ecuación por y_1 y la segunda por $y(t)$ y restarlas queda:

$$y''y_1 - y_1''y + p(t)(y'y_1 - y_1'y) = 0$$

Por otro lado el Wronskiano es igual a:

$$W(t) = W(y_1, y)(t) = det \begin{bmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{bmatrix} = y'y_1 - y_1'y \Rightarrow W(t)' = y''y_1 - y_1''y$$

Al reemplazar entonces $W(t), W'(t)$ resulta:

$$W(t)' + p(t)W(t) = 0$$

La cual es una EDO del tipo lineal homogenea de primer orden. La solución de esta EDO (es tambien variables separables):

$$W(t) = Ce^{-\int p(t)dt}$$

b)

$$\frac{d}{dt}(\frac{y(t)}{y_1(t)}) = \frac{y'y_1 - yy_1'}{y_1^2} = \frac{W(y_1, y)}{y_1^2} = \frac{Ce^{-\int p(t)dt}}{y_1^2}$$

Integrando:

$$\frac{y(t)}{y_1(t)} = C\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2} + C_2$$

Finalmente se obtiene:

$$y(t) = C\overbrace{y_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}}^{y_2(t)} + C_2 y_1(t)$$

c) Lo primero es normalizar la EDO:

$$y'' + \frac{2x}{(1-x^2)}y' - \frac{2}{(1-x^2)}y = 0$$

Tomando $y_1(x) = -x$, $p(x) = \frac{2x}{(1-x^2)} \Rightarrow \int \frac{2x}{(1-x^2)}dx = -ln(1-x^2)$
Reemplazando en el resultado de la parte b):

$$y(t) = Cx\int \frac{e^{ln(1-x^2)}}{(-x)^2}dx + C_2x = Cx\int (\frac{1}{x^2} - 1)dx + C_2x = Cx(-x^{-1} - x) + C_2x$$

Finalmente:

$$y(t) = C(-1-x^2) + C_2x$$

2.2. Sea Ψ una función definida en $\Re$ con Ψ' continua en $\Re$. Si $\Psi(0) = 1$ y $\Psi'(0) = 0$, se pide encontrar Ψ que satisface las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \Psi'' + M(1-R)\Psi = 0 & \text{para } x \leq 0 \\ \Psi'' - MR\Psi = 0 & \text{para } 0 < x \leq 1 \\ \Psi'' + M(1-R)\Psi = 0 & \text{para } 1 < x \end{cases} \tag{2.1}$$

Solución:
Cuando $x \in (-\infty, 0]$, $\Psi_1(x) = c_1 cos(\sqrt{M(1-R)}x) + c_2 sin(\sqrt{M(1-R)}x)$

Cuando $x \in (0, 1]$, $\Psi_2(x) = c_3 e^{\sqrt{MR}x} + c_4 e^{-\sqrt{MR}x}$

Cuando $x \in (1, \infty)$, $\Psi_3(x) = c_5 cos(\sqrt{M(1-R)}x) + c_6 sin(\sqrt{M(1-R)}x)$

Las derivadas de estas funciones son:

$$\Psi_1(x)' = \sqrt{M(1-R)}(-c_1 sin(\sqrt{M(1-R)}x) + c_2 cos(\sqrt{M(1-R)}x))$$

$$\Psi_2(x)' = \sqrt{MR}(c_3 e^{\sqrt{MR}x} - c_4 e^{-\sqrt{MR}x})$$

$$\Psi_3(x)' = \sqrt{M(1-R)}(-c_5 sin(\sqrt{M(1-R)}x) + c_6 cos(\sqrt{M(1-R)}x))$$

Se aplica ahora las condiciones iniciales:
$\Psi_1(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$
$\Psi_1'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\Rightarrow \Psi_1(x) = cos(\sqrt{M(1-R)}x)$$

$\Psi_2(0) = 1 \Rightarrow c_3 + c_4 = 1$
$\Psi_2'(0) = 0 \Rightarrow c_3 - c_4 = 0$

$$\Rightarrow \Psi_2(x) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{MR}x} + e^{-\sqrt{MR}x}) = cosh(\sqrt{MR}x)$$

Ahora se aplican condiciones de continuidad y diferenciabilidad:
$\Psi_3(1) = \Psi_2(1) \Rightarrow c_5 cos(\sqrt{M(1-R)}) + c_6 sin(\sqrt{M(1-R)}) = cosh(\sqrt{MR})$
$\Psi_3'(1) = \Psi_2'(1) \Rightarrow \sqrt{M(1-R)}(-c_5 sin(\sqrt{M(1-R)}) + c_6 cos(\sqrt{M(1-R)})) = \sqrt{MR} senh(\sqrt{MR})$

$$\Rightarrow \Psi_3(x) = c_5 cos(\sqrt{M(1-R)}x) + c_6 sin(\sqrt{M(1-R)}x)$$

donde:

$$c_5 = cosh(\sqrt{MR})cos^2(\sqrt{M(1-R)}) - \frac{\sqrt{MR}}{2\sqrt{M(1-R)}} senh(\sqrt{MR}) sen(2\sqrt{M(1-R)})$$

$$c_6 = cosh(\sqrt{MR}) sen(\sqrt{M(1-R)}) + \frac{\sqrt{MR}}{\sqrt{M(1-R)}} senh(\sqrt{MR}) cos(\sqrt{M(1-R)})$$

2.3. Encuentre la solución de la ecuación:

$$a^7 y^{vii} + a^6 y^{vi} + a^5 y^{v} + a^4 y^{iv} + a^3 y''' + a^2 y' + ay' + y = 0 \tag{2.2}$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y(0)' = \frac{\sqrt{2}}{2a}$ y la condición de estabilidad: $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, $a < 0$

Solución:

Sea $y(t) = e^{mt}$, entonces:

$$a^7m^7 + a^6m^6 + a^5m^5 + a^4m^4 + a^3m^3 + a^2m^2 + am + 1 = 0$$

Esto es equivalente a:

$$\sum_{i=0}^{7} p^i = \frac{1-p^8}{1-p}$$

con $p = am$

Entonces:

$$\sum_{i=0}^{7}(am)^i = \frac{1-(am)^8}{1-(am)} = \frac{[(am)^4+1][(am)^2+1][(am)+1][(am)-1]}{[(am)-1]}$$

$\Rightarrow$
$(am)^4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^4 + \frac{1}{a^4}$

$\Rightarrow$

$m_1 = \frac{1}{|a|}e^{\frac{\pi}{4}i} \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = \frac{1}{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$m_2 = -\frac{1}{|a|}e^{\frac{\pi}{4}i} \quad \Leftrightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$m_3 = \frac{1}{|a|}e^{-\frac{\pi}{4}i} \quad \Leftrightarrow \quad m_3 = \frac{1}{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$m_4 = -\frac{1}{|a|}e^{-\frac{\pi}{4}i} \quad \Leftrightarrow$
$m_4 = -\frac{1}{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

de $(am)^2 + 1 = 0$ se obtiene:

$$m_5 = \frac{1}{-}i, \qquad m_6 = -\frac{1}{a}i$$

de $(am) + 1 = 0$ se obtiene:

$$m_7 = -\frac{1}{a}$$

$\Rightarrow$

$$y(t) = e^{\frac{\sqrt{2}t}{2a}}[c_1 cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{2a}\right) + c_2 sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{2a}\right)] + e^{-\frac{\sqrt{2}t}{2a}}[c_3 cos\left(\frac{\sqrt{2}t}{2a}\right) + c_4 sin\left(\frac{\sqrt{2}t}{2a}\right)]$$
$$+c_5 cos\left(\frac{1}{a}t\right) + c_6 sin\left(\frac{1}{a}t\right) + c_7 e^{-\frac{1}{a}t}$$

Aplicando las condiciones del problema:

$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = 0$

$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$

$y(0)' = \frac{\sqrt{2}}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad y(0)' = \frac{\sqrt{2}}{2a}(c_1 + c_2) = \frac{\sqrt{2}}{2a} \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

Finalmente la Solución del problemas es:

$$y(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2a}t} cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2a}t\right)$$

2.4. Sea $\lambda > 0$ en el problema:

$$y^{(iv)} - \lambda y = 0$$

Estudie si existen valores de λ para los cuales el problema tiene solución no trivial.

Solución:

El polinomio caracterśtico: $p(m) = m^4 - \lambda$ se puede factorizar de la forma:

$$p(m) = (m^2 - \sqrt{\lambda})(m^2 + \sqrt{\lambda}) = (m - \sqrt[4]{\lambda})(m + \sqrt[4]{\lambda})(m^2 + \sqrt{\lambda}) = 0$$

Entonces la solución de la EDO es:

$$y(t) = c_1 e^{-\sqrt[4]{\lambda}t} + c_2 e^{\sqrt[4]{\lambda}t} + c_3 \cos(\sqrt[4]{\lambda}t) + c_4 \sin(\sqrt[4]{\lambda}t)$$

Las derivadas son:

$$y'(t) = \sqrt[4]{\lambda}(-c_1 e^{-\sqrt[4]{\lambda}t} + c_2 e^{\sqrt[4]{\lambda}t} - c_3 \sin(\sqrt[4]{\lambda}t) + c_4 \cos(\sqrt[4]{\lambda}t))$$

$$y''(t) = \sqrt{\lambda}(c_1 e^{-\sqrt[4]{\lambda}t} + c_2 e^{\sqrt[4]{\lambda}t} - c_3 \cos(\sqrt[4]{\lambda}t) - c_4 \sin(\sqrt[4]{\lambda}t))$$

Ahora se imponen las condiciones iniciales y condición terminal:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -c_1 + c_2 + c_4 = 0$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - c_3 = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 e^{-\sqrt[4]{\lambda}} + c_2 e^{\sqrt[4]{\lambda}} + c_3 \cos(\sqrt[4]{\lambda}) + c_4 \sin(\sqrt[4]{\lambda}) = 0$$

de la primera y tercera ecuación $\Rightarrow c_3 = 0$

$c_1 = -c_2$, $c_4 = -2c_2$, al poner esto en la cuarta ecuación $\Rightarrow c_2(senh(\sqrt[4]{\lambda}) - sen(\sqrt[4]{\lambda})) = 0$.

Como c_2 debe ser distinto de cero para no tener la solución trivial, se debe cumplir que :

$$senh(\sqrt[4]{\lambda}) = sen(\sqrt[4]{\lambda})$$

Lo cual solo se cumple para $\lambda = 0$.