# MA26A, Auxiliar 1, 15 de Marzo, 2007

Profesor Cátedra: Raúl Manasevich

Profesor Auxiliar : Alfredo Núnez

## 1. Ecuaciones de primer orden.

**1.1.** Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y^2 + \beta ty}{t^2 + \alpha ty}$$

Solución:

Se aplica el cambio de variable: $y = tu$, $y' = u + tu'$.
Al reemplazar en la ecuación resulta:

$$u + tu' = \frac{u^2 + \beta u}{1 + \alpha u}$$

Despejando $u'$ queda:

$$u' = \frac{u((1-\alpha)u + (\beta - 1))}{t(1 + \alpha u)}$$

La cual es una ecuación del tipo Variables Separables. Entonces se cumple que:

$$\int \frac{1 + \alpha u}{u((1-\alpha)u + (\beta - 1))} du = \int \frac{1}{t} dt$$

ocupando fracciones parciales, resulta:

$$\int \frac{A}{u} du + \int \frac{B}{(1-\alpha)u + (\beta - 1)} du = \int \frac{1}{t} dt$$

donde $A = \frac{1}{\beta - 1}$ y $B = \frac{1 - \alpha\beta}{1 - \beta}$.
Finalmente se obtiene la solución implícita de la EDO:

$$u^A((1-\alpha)u + (\beta - 1))^{\frac{B}{1-\alpha}} = ct$$

Regresando a la variable original, sustituyendo $u = \frac{y}{t}$ queda:

$$(\frac{y}{t})^{\frac{1}{\beta - 1}}((1-\alpha)(\frac{y}{t}) + (\beta - 1))^{\frac{1-\alpha\beta}{(1-\beta)(1-\alpha)}} = ct$$

**1.2.** Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Solución:

Se aplica el cambio de variable $y = xu$, $y' = u + xu'$ y queda

$$x(u + xu') - xu = \sqrt{x^2 + x^2u^2}$$

Al simplificar resulta:

$$x^2u' = x\sqrt{1 + u^2}$$

La cual es una EDO del tipo Variables Separables.

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Entonces se tiene que:

$$asenh(u(x)) = \ln(x) + C$$

Regresando a la variable inicial, reemplazando $u = \frac{y}{x}$, se obtiene la solución del problema:

$$y(x) = x\,\mathrm{senh}(\ln(x) + C)$$

**1.3.** Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y^2}{(m + n)^2} - \frac{4mn}{(m + n)^2}y - (m - n)^2$$

Donde $m$ y $n$ son constantes positivas.

Solución:

La ecuación diferencial es del tipo Riccati. El método dice que para resolver este tipo de ecuación se debe encontrar una solución particular de la EDO. Se intenta encontrar primero una solución del tipo constante:

$y_1 = C$, $y_1' = 0$, en la EDO y luego de hacer algunas simplificaciones resulta la siguiente ecuación algebraica de segundo grado:

$$C^2 - 4mnC - (m^2 - n^2)^2 = 0$$

cuyas soluciones son: $(m + n)^2$ y $-(m - n)^2$.

Tomando por ejemplo como solución a $y_1 = (m + n)^2$, el siguiente paso es realizar el cambio de variable:

$$z = y - y_1 = y - (m+n)^2$$

$$z' = y'$$

Al reemplazar este cambio de variable en la EDO, queda la siguiente EDO del tipo Bernoulli:

$$z' + (\frac{4mn}{(m+n)^2} - 2)z = \frac{1}{(m+n)^2}z^2.$$

$$\frac{z'}{z^2} + (\frac{4mn}{(m+n)^2} - 2)\frac{1}{z} = \frac{1}{(m+n)^2}.$$

Para resolver la EDO de tipo Bernoulli se realiza el cambio de variable: $u = \frac{1}{z}$, $u' = -\frac{1}{z^2}z'$, quedando la siguiente EDO de tipo Lineal.

$$u' + \frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2}u = \frac{-1}{(m+n)^2}$$

Para resolver la EDO lineal, esta se debe multiplicar por el factor integrante: $e^{\int (\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2})dt} = e^{(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2})t}$.

$$\frac{d(ue^{(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2})t})}{dt} = \frac{-1}{(m+n)^2}e^{(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2})t}$$

entonces

$$u(t) = e^{(\frac{-2(n^2+m^2)}{(m+n)^2})t}(C - \frac{1}{(m+n)^2}\int e^{(\frac{2(n^2+m^2)}{(m+n)^2})t})dt = Ce^{(\frac{-2(n^2+m^2)}{(m+n)^2})t} - \frac{1}{2(n^2+m^2)}$$

Regresando a la variable $z = \frac{1}{u}$

$$z(t) = \frac{1}{Ce^{(\frac{-2(n^2+m^2)}{(m+n)^2})t} - \frac{1}{2(n^2+m^2)}}$$

Regresando a la variable $y(t) = z(t) + y_1(t)$, se obtiene la solución del problema:

$$y(t) = \frac{1}{Ce^{(\frac{-2(n^2+m^2)}{(m+n)^2})t} - \frac{1}{2(n^2+m^2)}} + (m+n)^2.$$

**1.4.**

(a) Considere la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$y' + a(t)y = b(t)u(t)$$

(i) Sabiendo que en la ecuación se cumple lo siguiente:

- cuando $u(t) = 0, \quad y(0) = 1$ la solución es $y(t) = e^{-t}$

- cuando $u(t) = 1, \quad y(0) = 0$ la solución es $y(t) = -e^{-t} + 1$

se pide encontrar las funciones $a(t)$ y $b(t)$.

(ii) A partir de (i), determine la solución $y(t)$ de la ecuación cuando

$$u(t) = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 0$$

(b) Resuelva la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{gathered} y' + (\tan x)y = \cos^2 x \\ y(0) = -1 \end{gathered}$$

Solución:

a) El primer dato: $u(t) = 0, y(t) = e^{-t}, y'(t) = -e^{-t}$ . Entonces:

$$-e^{-t} + a(t)e^{-t} = (a(t) - 1)e^{-t} = 0$$

Luego

$$a(t) = 1$$

El segundo dato: $u(t) = 1, y(t) = -e^{-t} + 1, y'(t) = -e^{-t}$ . Entonces:

$$-e^{-t} + 1 - e^{-t} = 1 = b(t)$$

Finalmente los parámetros de la EDO resultaron ser constantes. Ahora se resuelve la parte ii):

$$y' + y = \sin(t).$$

La EDO es del tipo Lineal de primer orden. El método dice que se debe obtener un factor integrante, el cual es $e^t$. Al multiplicar este factor integrante en la EDO, esta queda:

$$\frac{d(ye^t)}{dt} = e^t \sin(t).$$

La cual es una EDO de variables separables de la forma $y' = f(t)$, la cual se resuelve integrando directamente.

$$\int d(ye^t) = \int e^t \sin(t)dt + C = -\frac{1}{2}e^t \cos(t) + \frac{1}{2}e^t \sin(t) + C.$$

$$y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t))$$

La condición inicial $y(0) = 0$ dice que $C = \frac{1}{2}$, con lo que la solución al problema con condición inicial es:

$$y(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + \sin(t) - \cos(t))$$

b) La EDO es del tipo lineal, y el factor integrante $e^{\int \tan(x)} = e^{-\ln(\cos(x))} = \sec(x)$. Al multiplicar la EDO por el factor integrante resulta:

$$\frac{d(y\sec(x))}{dx} = \cos(x)$$

$$\int d(y\sec(x)) = \int \cos(x)dx + C$$

$$y(x) = C\cos(x) + \sin(t)\cos(t),$$

La CI es $y(0) = -1$, entonces $C = -1$ con lo que la solución al problema con CI es:

$$y(x) = \sin(t)\cos(t) - \cos(x)$$

**1.5.** Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \tan(y) \cdot \mathrm{sen}(y) + 3\tan(y) + 2\sec(y)$$

Sugerencia: Use un cambio de variable adecuado para convertir la ecuación en Ricatti a coeficientes constantes.

Solución:

El cambio de variable adecuado es: $z = \mathrm{sen}(y), z' = \cos(y)y'$. Al aplicar el CV en la EDO, resulta:

$$\cos(y)y' = (\mathrm{sen}(y))^2 + 3\,\mathrm{sen}(y) + 2$$

$$z' = z^2 + 3z + 2$$

La cual es una EDO del tipo Riccati. Para resolverla se debe encontrar una solución particular de la EDO. Se tantea $z_1 = C, z_1' = 0$. Se debe entonces resolver la ecuación de segundo grado:

$$C^2 + 3C + 2 = (C+2)(C+1) = 0$$

Sea $y_1 = -2$. El cambio de variable para reducir EDO del tipo Ricatti a EDO Bernoulli es $w = z - z_1 = z + 2, w' = z'$. Al aplicarlo resulta la EDO:

$$w' + w = w^2$$

$$w^{-2}w' + w^{-1} = 1$$

El cambio de variable adecuado es: $v = w^{-1}, v' = -w^{-2}w'$, con la cual resulta la EDO del tipo lineal:

$$v' - v = -1$$

Cuya solución es:

$$v(t) = ce^t + 1$$

Volviendo a la variable inicial:

$$w(t) = \frac{1}{ce^t + 1}$$

$$z(t) = \frac{1}{ce^t + 1} - 2$$

$$y(t) = \arcsin(\frac{1}{ce^t + 1} - 2)$$