

2. PROPIEDADES GENERALES DE LA ECUACIÓN LINEAL DE ORDEN n

La ecuación diferencial lineal de orden n más general tiene la forma

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t). \quad (2.1)$$

Si $g(t) \equiv 0$ diremos que esta ecuación es *homogénea* y *no homogénea* en caso contrario.

Vamos a suponer de ahora en adelante la siguiente hipótesis.

(H_1) Las funciones coeficientes a_i , $i = 0, \dots, n$, y la función g están definidas en un intervalo común I , donde son continuas. Además $a_n(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Definición 2.1. Sean $f_1, \dots, f_n$, n funciones definidas en un intervalo común I . Decimos que estas funciones son linealmente dependientes en I si existen constantes $c_1, \dots, c_n$ no todas nulas tal que

$$c_1 f_1(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in I.$$

Decimos que $f_1, \dots, f_n$ son linealmente independientes si

$$c_1 f_1(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in I$$

implica que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Ejemplo.

$$f_1(t) = t, \quad f_2(t) = |t|$$

Es inmediato ver que $\{f_1, f_2\}$ es un conjunto linealmente dependiente en el intervalo $[0, \infty)$. Sin embargo estas mismas funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Ejemplo. Las funciones

$$f_1(t) = \cos kt, \quad f_2(t) = \sin kt, \quad k \neq 0,$$

son linealmente independientes en cualquier intervalo I . En efecto, supongamos que

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in I.$$

Como tenemos una identidad podemos derivar, obteniendo

$$c_1 f_1'(t) + c_2 f_2'(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in I.$$

Reemplazando, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 \cos kt + c_2 \sin kt &= 0 \\ -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt &= 0. \end{aligned}$$

Como el determinante de los coeficientes es no nulo implica que $c_1 = c_2 = 0$. Entonces la funciones $\{\cos(k \cdot), \sin(k \cdot)\}$ son linealmente independientes en el intervalo I .

Más generalmente tenemos

Teorema 2.1. Sean $f_1, \dots, f_n$, n funciones definidas en un intervalo I , donde cada una de ellas posee hasta la derivada $n - 1$. Si el determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(t_0) & \cdots & f_n(t_0) \\ f_1'(t_0) & \cdots & f_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.2)$$

para algún $t_0 \in I$, entonces $\{f_1, \dots, f_n\}$ son linealmente independientes en ese intervalo.

Definición 2.2. La función determinante

$$W(f_1, \dots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

se llama el Wronskiano de las funciones $f_1, \dots, f_n$ en I .

Demostración del Teorema 2.1. Por contradicción, supongamos que existe un punto $t_0 \in I$ tal que (2.2) es cierta y que $f_1, \dots, f_n$ son linealmente dependientes en I . Existen entonces constantes $c_1, \dots, c_n$, no todas nulas, tal que

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Derivando $n - 1$ veces se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i f_i'(t) &= 0 \quad \forall t \in I \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n c_i f_i^{(n-1)}(t) &= 0 \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones las podemos escribir como el sistema

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & \cdots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0,$$

para cada $t \in I$. En particular para $t = t_0$, así

$$\begin{pmatrix} f_1(t_0) & \cdots & f_n(t_0) \\ f_1'(t_0) & \cdots & f_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

Pero este sistema de ecuaciones tiene una solución no trivial, entonces el determinante de los coeficientes debe ser cero, esto es $W(f_1, \dots, f_n)(t_0) = 0$, que es una contradicción ■

Corolario 2.1. Sean $f_1, \dots, f_n$ n funciones linealmente dependientes en I , entonces

$$W(f_1, \dots, f_n)(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Ejemplo. Sean m_1, m_2, m_3 tres números reales distintos entre si y consideremos las funciones

$$f_1(t) = e^{m_1 t}, \quad f_2(t) = e^{m_2 t}, \quad f_3(t) = e^{m_3 t}.$$

Afirmamos que estas funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. Para ver esto consideremos el wronskiano

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = \begin{vmatrix} e^{m_1 t} & e^{m_2 t} & e^{m_3 t} \\ m_1 e^{m_1 t} & m_2 e^{m_2 t} & m_3 e^{m_3 t} \\ m_1^2 e^{m_1 t} & m_2^2 e^{m_2 t} & m_3^2 e^{m_3 t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(m_1+m_2+m_3)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = -e^{(m_1+m_2+m_3)t}(m_1 - m_3)(m_2 - m_1)(m_3 - m_2).$$

El resultado se sigue entonces del Teorema 2.1.

Volvamos ahora a la ecuación diferencial lineal de orden n (2.1).

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t),$$

para la cual suponemos que se satisface la hipótesis (H_1) . Esta ecuación la vamos a escribir equivalentemente como

$$\sum_{i=0}^n a_i(t)y^{(i)} = g(t), \quad (2.3)$$

con la convención $y^{(0)}(t) \equiv y(t)$.

Proposición 2.1. (*Principio de Superposición.*) Sean $y_1 \cdots y_k$, k soluciones de la ecuación homogénea

$$\sum_{i=0}^n a_i(t)y^{(i)} = 0 \quad \text{en } I. \quad (2.4)$$

Entonces la combinación lineal

$$Y(t) := \sum_{i=1}^k c_i y_i(t),$$

donde los c_i , $i = 1, \dots, k$ son constantes, es también una solución de la ecuación homogénea en I .

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n a_j(t) Y^{(j)}(t) &= \sum_{j=0}^n a_j(t) \sum_{i=1}^k c_i y_i^{(j)}(t) \\ &= \sum_{i=1}^k c_i \underbrace{\left(\sum_{j=0}^n a_j(t) y_i^{(j)}(t) \right)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$y'' + k^2 y = 0$$

Sabemos que $y_1(t) = \cos kt$, $y_2(t) = \sin kt$ son dos soluciones de esta ecuación definidas en $\mathbb{R}$, que son linealmente independientes en este intervalo. Formemos

$$Y(t) = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt,$$

entonces Y es también solución. Podemos verificar esto directamente, derivando se tiene

$$\begin{aligned} Y''(t) + k^2 Y(t) &= -k^2(c_1 \cos kt + c_2 \sin kt) + k^2(c_1 \cos kt + c_2 \sin kt) \\ &= c_1(k^2 \cos kt - k^2 \cos kt) + c_2(k^2 \sin kt - k^2 \sin kt) = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$y'' - k^2 y = 0.$$

Entonces

$$y_1(t) = e^{kt}, \quad y_2(t) = e^{-kt},$$

son dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación en $\mathbb{R}$. De la proposición 2.4, se tiene que

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

es también solución.

A continuación vamos a estudiar un problema importante que llamamos problema con condición inicial para la ecuación diferencial (2.1) o equivalentemente ecuación (2.3). Este problema se escribe como

$$(I_n) \quad \begin{cases} a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \\ y(t_0) = c_1, y'(t_0) = c_2, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = c_n, \end{cases}$$

donde suponemos que las constantes $c_1, \cdots, c_n$ y $t_0 \in I$ son datos del problema y que se satisface la condición (H_1) .

En este problema se quiere encontrar una función y definida en un intervalo (que según se verá va a coincidir con I), que tenga n derivadas en I , que satisfice la ecuación para cada $t \in I$ y las condiciones iniciales en t_0 .

Por ejemplo para el caso $n = 2$ este problema se reduce a

$$(I_2) \quad \begin{cases} a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \\ y(t_0) = c_1, \quad y'(t_0) = c_2. \end{cases}$$

Para el problema (I_n) se tiene el siguiente resultado general.

Teorema 2.2. Sean $a_0(t), \dots, a_n(t), g(t)$, funciones continuas en un intervalo I tal que $a_n(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Sea $t_0 \in I$, entonces el problema con condición inicial (I_n) tiene una única solución definida en el intervalo I .

Este teorema asegura dos cosas: la existencia de una función (solución) que satisface la ecuación diferencial (en I) y las condiciones iniciales y además que ella es única.

No vamos a demostrar este teorema todavía, pero lo haremos más adelante, como un caso particular, cuando tratemos sistemas de ecuaciones diferenciales.

A continuación y como consecuencia de este teorema vamos a estudiar algunas propiedades de la ecuación homogénea lineal de orden n (2.4). Primero una consecuencia inmediata de este teorema.

Corolario 2.2. La función $y \equiv 0$, en I , es la única solución de la ecuación homogénea (2.4) que satisface las condiciones iniciales

$$y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0, \dots, y^{n-1}(t_0) = 0,$$

y la llamamos la solución trivial.

Note que la solución trivial siempre satisface ecuación homogénea (2.4).

Teorema 2.3. Sean $\{y_1 \cdots y_n\}$ n soluciones de la ecuación diferencial (2.4) definidas en I . Entonces $\{y_1 \cdots y_n\}$ es un conjunto de soluciones linealmente independientes, si y solo si

$$W(y_1 \cdots y_n)(t) \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

Demostración. Si es el caso que $W(y_1 \cdots y_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces por Teorema 2.1 se tiene que $\{y_1 \cdots y_n\}$ son funciones linealmente independientes.

Supongamos que $\{y_1 \cdots y_n\}$ son soluciones linealmente independientes de (2.4). Queremos probar que $W(y_1 \cdots y_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Para demostrar esto, vamos a probar equivalentemente que

$$W(y_1 \cdots y_n)(t_0) = 0, \quad \text{para algún } t_0 \in I, \quad (2.5)$$

implica que $\{y_1 \cdots y_n\}$ son linealmente dependientes en I . Supongamos entonces (2.5) y formemos el sistema de n ecuaciones algebraicas

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ y_1'(t_0) & \cdots & y_n'(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

De (2.5) y Algebra Lineal se tiene que el sistema algebraico (2.6) tiene una solución

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq 0$$

Esto es una solución donde no todos los c_i 's son nulos. Formemos entonces

$$Y(t) := c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t). \quad (2.7)$$

Por el principio de superposición como $y_1(t) \cdots y_n(t)$ son soluciones, $Y(t)$ también lo es. Además se satisface

$$Y(t_0) = 0, \quad Y'(t_0) = 0, \quad \dots \quad Y^{(n-1)}(t_0) = 0$$

Pero entonces, por el Corolario 2.2, se debe tener que

$$Y(t) = 0, \quad \forall t \in I,$$

que de (2.7), nos da

$$c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t) = 0, \quad \forall t \in I,$$

con $c_1 \cdots c_n$ no todas nulas. Esto significa que $\{y_1 \cdots y_n\}$ son linealmente dependientes en I . ■

Teorema 2.4. Sean $\{y_1 \cdots y_n\}$ n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2.4). Sea también $Z(t)$ otra solución cualquiera de esta ecuación. Entonces existen constantes $c_1 \cdots c_n$, tal que

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t).$$

Demostración. Sea $t_0 \in I$ y consideremos el sistema algebraico

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(t_0) \\ Z'(t_0) \\ \vdots \\ Z^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Como el determinante de los coeficientes de este sistema, que es el wronskiano

$$W(y_1 \cdots y_n)(t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

(las soluciones son linealmente independientes) se tiene de Algebra Lineal que este sistema tiene una única solución.

Llamemos $(\rho_1 \cdots \rho_n)$ a esta solución y consideremos la función

$$G(t) = \rho_1 y_1(t) + \cdots + \rho_n y_n(t)$$

Es claro que G es solución de (2.4) y que considerando (2.8) satisface en t_0

$$G(t_0) = Z(t_0), \quad G'(t_0) = Z'(t_0), \cdots, G^{(n-1)}(t_0) = Z^{(n-1)}(t_0).$$

Por Teorema 2.2 (parte de unicidad), se debe tener que

$$Z(t) = G(t) = \sum_{i=1}^n \rho_i y_i(t) \quad \forall t \in I.$$

Se concluye la demostración definiendo $c_i = \rho_i$, $i = 1 \cdots n$. ■

Hasta el momento hemos supuesto que existe un conjunto de soluciones linealmente independientes $\{y_1 \cdots y_n\}$ de la ecuación (2.4). Vamos a verificar que esto es así en el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *La ecuación (2.4) tiene un conjunto de soluciones $\{y_1 \cdots y_n\}$ que son linealmente independientes en el intervalo I .*

Demostración. Para cada $i = 1 \cdots n$, consideremos el problema con condición inicial,

$$\begin{cases} a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0, \cdots, y^{(i-1)}(t_0) = 1, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = 0, \end{cases}$$

donde $t_0 \in I$ es fijo. Por el Teorema (2.2), de existencia y unicidad, se tiene que este problema tiene una única solución definida en el intervalo I . Llamemos y_i a esta solución.

Vamos a probar que este conjunto $\{y_1 \cdots y_n\}$ es linealmente independientes en el intervalo I . Para esto basta probar que

$$W(y_1 \cdots y_n)(t_0) \neq 0,$$

para algun $t_0 \in I$. Se tiene

$$W(y_1 \cdots y_n)(t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_i(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & y_i^{i-1}(t_0) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{n-1}(t_0) & \cdots & y_i^{n-1}(t_0) & \cdots & y_n^{n-1}(t_0) \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Por lo tanto, del Teorema 2.1, $\{y_1 \dots y_n\}$ son linealmente independientes en I .

A continuación estudiamos la estructura del espacio de soluciones de la ecuación (2.4).

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las funciones $y : I \mapsto \mathbb{R}$ que son solución de la ecuación (2.4), esto es

$$\mathcal{S} = \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \mid y \text{ es solución de (2.4)}\}.$$

Notemos que si α, β son escalares reales e $y_1 \in \mathcal{S}$, $y_2 \in \mathcal{S}$, entonces $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{S}$, ya que cualquier combinación lineal de soluciones es solución, por el principio de superposición. Además claramente la solución trivial está en $\mathcal{S}$.

Este argumento nos dice que $\mathcal{S}$ tiene la estructura de un espacio vectorial (espacio lineal). Más aún, Teorema (2.4) nos dice que $\dim \mathcal{S} = n$. Así, hemos demostrado.

Teorema 2.6. *El conjunto de soluciones $\mathcal{S}$ de la ecuación (2.4) es un espacio vectorial de dimensión n .*

Una base de soluciones en este espacio esta formada por cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes.

Por ejemplo, en el caso de la ecuación

$$y'' + k^2 y = 0$$

una base de soluciones queda dada por $\{y_1, y_2\}$ donde $y_1(t) = \cos kt$, $y_2(t) = \sin kt$.

Sea $\{y_1 \dots y_n\}$ una base de soluciones de la ecuación (2.4). Entonces sabemos que para cualquier solución y , existen constantes $c_1 \dots c_n$ tal que

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t).$$

Por esta razón la expresión

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_n y_n(t),$$

donde ahora $c_1 \dots c_n$ son constantes arbitrarias, la llamamos la solución general de la ecuación homogénea (2.4) (más adelante la denotaremos por $y_h(t)$).

Ejemplo. Consideremos el problema

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Queremos encontrar un conjunto de tres soluciones linealmente independientes, es decir una base de soluciones de esta ecuación. Intentamos soluciones de la forma

$$y(t) = e^{\alpha t}.$$

Derivando y substituyendo en la ecuación, se tiene

$$(\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6)e^{\alpha t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

por lo que

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 = 0.$$

Se tiene que $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, y $\alpha_3 = 3$ son raíces de esta ecuación, ellas dan origen a las tres soluciones

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{2t}, \quad y_3(t) = e^{3t}.$$

Como $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son distintas entre si, sabemos que son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. En consecuencia la solución general de la ecuación diferencial es dada por

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t},$$

con c_1, c_2 y c_3 constantes arbitrarias.

Consideremos ahora la ecuación no homogénea (2.3)

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(i)} = g(t),$$

para la cual como en el caso de la ecuación homogénea queremos encontrar una representación para la solución general. La ecuación homogénea asociada a esta ecuación es

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(i)} = 0.$$

Sea $\{y, \dots, y_n\}$ una base de soluciones de esta ecuación. y supongamos que por algún método hemos encontrado una solución de la ecuación no homogénea que

llamamos y_p , por solución particular. Sea también y una solución cualquiera de la ecuación no homogénea y definamos una función z por $z(t) := y(t) - y_p(t)$. Se tiene que

$$\sum_{j=0}^n a_j(t) z^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^n a_j(t) y^{(j)}(t) - \sum_{j=0}^n a_j(t) y_p^{(j)}(t) = g(t) - g(t) = 0.$$

Entonces z es solución de la ecuación homogénea y por lo tanto existen constantes $c_1, \dots, c_n$, tal que $z(t) = \sum_{i=0}^n c_i y_i(t)$. De aquí,

$$y(t) = \sum_{i=0}^n c_i y_i(t) + y_p(t),$$

expresión que llamamos la solución general de la ecuación no homogénea. Reconociendo que la expresión $\sum_{i=0}^n c_i y_i(t)$ es lo que hemos llamado la solución general de la ecuación homogénea, la llamaremos de ahora en adelante y_h . Se tiene entonces que la solución general de la ecuación no homogénea se puede escribir como

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3t, \quad (2.9)$$

y llamemos y a la solución general de esta ecuación. La ecuación homogénea asociada es

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0,$$

y sabemos que su solución general queda dada por

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t},$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes arbitrarias. Falta conocer $y_p(t)$, la cual vamos a encontrar en forma artesanal. Suponemos que $y_p(t) = At + B$. Reemplazando en la ecuación diferencial (2.9), nos da un par de ecuaciones algebraicas de las cuales determinamos A y B . Efectuando los cálculos se obtiene $A = -\frac{1}{2}$ y $B = -\frac{11}{12}$. Entonces, la solución general de la ecuación (2.9) es

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} - \frac{1}{2}t - \frac{11}{12}.$$

3. ECUACIÓN DE SEGUNDO ORDEN HOMOGÉNEA

En esta sección queremos aplicar la teoría de la sección anterior a la ecuación diferencial

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \quad (3.1)$$

donde a_2, a_1, a_0 son funciones continuas en un intervalo I , con $a_2(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, es decir se cumple la condición (H_1) .

De acuerdo a lo visto para encontrar la solución general de la ecuación (3.1) tenemos que encontrar dos soluciones linealmente independientes, es decir una base de soluciones para esta ecuación. Consideremos dos ejemplos.

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$t^2 y'' + 8ty' + 12y = 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

Intentamos soluciones de la forma $y(t) = t^m$. Derivando

$$y'(t) = mt^{m-1}, \quad y''(t) = m(m-1)t^{m-2}.$$

y formando el lado izquierdo de la ecuación, se obtiene que

$$\begin{aligned} t^2 y'' + 8ty' + 12y &= t^2 m(m-1)t^{m-2} + 8tmt^{m-1} + 12t^m \\ &= (m(m-1) + 8m + 12)t^m. \end{aligned}$$

De aquí que $y(t) = t^m$ será solución si

$$m(m-1) + 8m + 12 = m^2 + 7m + 12 = (m+3)(m+4) = 0.$$

Este polinomio tiene las dos raíces,

$$m_1 = -3, \quad m_2 = -4,$$

lo que nos da las dos soluciones linealmente independientes

$$y_1(t) = t^{-3}, \quad y_2(t) = t^{-4},$$

con lo que la solución general de la ecuación es

$$y(t) = C_1 t^{-3} + C_2 t^{-4}.$$

Consideremos a continuación un ejemplo donde el método anterior nos da solo una solución.

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

Como antes intentamos soluciones de la forma $y(t) = t^m$. Derivando, se tiene que

$$y'(t) = mt^{m-1}, \quad y''(t) = m(m-1)t^{m-2}.$$

Formando el lado izquierdo de la ecuación

$$\begin{aligned} t^2 y'' - 3ty' + 4y &= t^2 m(m-1)t^{m-2} - 3tmt^{m-1} + 4t^m \\ &= (m(m-1) - 3m + 4)t^m. \end{aligned}$$

De aquí que $y(t) = t^m$ será solución si

$$m(m-1) - 3m + 4 = (m-2)^2 = 0.$$

Este polinomio tiene una raíz con multiplicidad 2,

$$m_{1,2} = 2,$$

lo que nos da solo una solución de la ecuación $y_1(t) = t^2$.

Para completar la base tenemos entonces que usar otro método el cual lo vamos a explicar para el caso general.

Partimos de la ecuación (3.1) que escribimos en la forma:

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = 0 \quad (3.2)$$

donde

$$P(t) = \frac{a_1(t)}{a_2(t)} \quad \text{y} \quad Q(t) = \frac{a_0(t)}{a_2(t)}.$$

Suponemos que se conoce una solución y_1 de este problema y queremos completar la base.

Por condiciones técnicas vamos a suponer también que $y_1(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Si esta condición no se satisface entonces el método se aplica en cualquier subintervalo de I donde ella se cumpla.

Intentamos una solución en la forma

$$y(t) = u(t)y_1(t). \quad (3.3)$$

Derivando y formando la ecuación (3.2) se obtiene:

$$0 = y'' + P(t)y' + Q(t)y = y_1(t)u'' + (2y_1'(t) + P(t)y_1(t))u' + \underbrace{(y_1'' + P(t)y_1' + Q(t)y_1)}_{=0}u,$$

de donde y , dado por (3.3), será solución si u satisface

$$y_1(t)u'' + (2y_1'(t) + P(t)y_1(t))u' = 0.$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$u'' + \left(\frac{2y_1'(t)}{y_1(t)} + P(t) \right) u' = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $u' = w$, se obtiene que w satisface

$$w' + \underbrace{\left(\frac{2y_1'(t)}{y_1(t)} + P(t) \right)}_{\tilde{P}(t)} w = 0,$$

que es una lineal de primer orden. Ahora

$$e^{\int \tilde{P}(t) dt} = y_1^2(t) e^{\int P(t) dt},$$

de donde

$$(w' + \tilde{P}(t)w) e^{\int \tilde{P}(t) dt} = 0,$$

nos da

$$(y_1^2(t) e^{\int P(t) dt} w(t))' = 0.$$

Integrando

$$w(t) = u'(t) = \frac{C_2}{y_1^2(t)} e^{-\int P(t) dt},$$

de donde una nueva integración nos da

$$u(t) = C_1 + C_2 \int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int P(t) dt} dt.$$

De aquí y de (3.3), $y(t)$ queda dado por

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_1(t) \int \frac{e^{-\int P(t) dt}}{y_1^2(t)} dt. \quad (3.4)$$

Una segunda solución es dada entonces por

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int P(t) dt}}{y_1^2(t)} dt.$$

Mostramos a continuación que y_1, y_2 son linealmente independientes en I .

Para esto formamos el correspondiente wronskiano

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1(t) \int \frac{e^{-\int P(t)dt}}{y_1^2(t)} dt \\ y_1'(t) & y_1'(t) \int \frac{e^{-\int P(t)dt}}{y_1^2(t)} dt + \frac{y_1(t)e^{-\int P(t)dt}}{y_1^2(t)} \end{vmatrix} \\
&= e^{-\int P(t)dt} \neq 0 \quad \text{en } I
\end{aligned}$$

Por lo tanto y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes en I de la ecuación diferencial (3.2) (respectivamente (3.1)), y la solución general de esta ecuación es entonces (3.4).

4. EDO LINEAL DE ORDEN n CON COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos primero el caso de la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (4.1)$$

donde a, b y c son constantes con $a \neq 0$. Intentando soluciones de la forma $y(t) = e^{mt}$, derivando, y reemplazando en la ecuación (4.1), se obtiene

$$(am^2 + bm + c)e^{mt} = 0.$$

Por lo tanto y es solución de (4.1) si m es una raíz del polinomio

$$p(m) = am^2 + bm + c. \quad (4.2)$$

Dependiendo de las raíces se obtienen distintos casos.

(a) $p(m) = 0$ tiene dos raíces reales y distintas m_1 y m_2 . Entonces $y_1(t) = e^{m_1 t}$ y $y_2(t) = e^{m_2 t}$ son soluciones linealmente independientes que forman una base de soluciones. La solución general en este caso es dada por

$$y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t},$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

(b) $p(m) = 0$ tiene una raíz real m_1 de multiplicidad dos, la cual da origen a la solución $y_1(t) = e^{m_1 t}$. Para encontrar otra solución linealmente independiente usamos el método de la sección anterior. Así usando la formula

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{-\int P(t)dt} dt$$

con $P(t) = \frac{b}{a}$ y $m_1 = -\frac{b}{2a}$, se obtiene la solución $y_2(t) = te^{m_1}$. Las soluciones y_1 e y_2 son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ por lo que la solución general de (4.1) es

$$y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t} = (c_1 + c_2 t) e^{m_1 t}.$$

(c) $p(m) = 0$ tiene raíces complejas, que deben ser complejas conjugadas y que denotamos por $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$. En este caso las expresiones

$$y_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t},$$

son soluciones complejas de (4.1). Estas se pueden escribir como

$$y_1(t) = u(t) + iv(t), \quad y_2(t) = u(t) - iv(t),$$

donde

$$u(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{y} \quad v(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

A partir de que y_1 e y_2 son soluciones complejas de (4.1) es inmediato ver que u y v son soluciones reales de esta ecuación. También, derivando, se puede demostrar directamente que u y v son soluciones linealmente independientes en $\mathbb{R}$ de (4.1). De esta forma la solución general de (4.1) se puede escribir como:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t = (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) e^{\alpha t}.$$

Ejemplo.

$$3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 0$$

En este caso $p(m) = 3m^2 + 2m + 1$, que tiene como raíces

$$m_1 = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3}.$$

La solución general de esta ecuación es

$$y(t) = e^{-t/3} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}t}{3} + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}t}{3} \right).$$

Consideremos ahora el caso de la ecuación de orden n . Tiene la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (4.3)$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes reales, con $a_n \neq 0$. Como en el caso de $n = 2$ vamos a intentar solución de la forma $y(t) = e^{mt}$. Derivando y reemplazando en (4.3), se obtiene

$$p(m) e^{mt} = 0,$$

donde

$$p_n(m) = a_n m^n + \dots + a_1 m + a_0,$$

que vamos a llamar el polinomio característico de la ecuación de orden n .

Así tendremos soluciones de (4.3) de la forma $y(t) = e^{mt}$ cada vez que m sea una raíz del polinomio característico. Como en el caso de la ecuación de segundo orden hay varios casos dependiendo de las raíces. A continuación vamos a estudiar las distintas situaciones que suceden.

Caso 1. $p_n(m) = 0$ tiene n raíces reales y distintas $m_1, m_2, \dots, m_n$. Esto da origen a las n soluciones linealmente independientes:

$$y_1(t) = e^{m_1 t}, \dots, y_n(t) = e^{m_n t},$$

que forman una base de soluciones para este caso. La solución general es entonces

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{m_i t}.$$

Caso 2. $p_n(m) = 0$ tiene una sola raíz real m , de multiplicidad n . Digamos

$$p_n(m) = a_n(m - m_1)^n.$$

Vamos a motivar la búsqueda de la base de soluciones para este caso por medio de un ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

El polinomio característico correspondiente es

$$p_3(m) = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m + 1)^3$$

que tiene como raíz a $m_1 = -1$ con multiplicidad 3. Esto da solo una solución de la forma exponencial $y_1(t) = e^{-t}$, y por lo tanto tenemos que completar la base por un medio distinto.

Definamos la función de dos variables $u(t, \alpha) = e^{\alpha t}$. Se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \alpha) = \alpha e^{\alpha t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \alpha) = \alpha^2 e^{\alpha t}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t, \alpha) = \alpha^3 e^{\alpha t}.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t, \alpha) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \alpha) + 3 \frac{\partial u}{\partial t}(t, \alpha) + u(t, \alpha) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial t^3}(e^{\alpha t}) + 3 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{\alpha t}) + 3 \frac{\partial}{\partial t}(e^{\alpha t}) + e^{\alpha t} \end{aligned}$$

$$= (\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1)e^{\alpha t} = (\alpha + 1)^3 e^{\alpha t} \quad (4.4)$$

expresión que es una identidad. Derivando (4.4) parcialmente con respecto a α , se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}(t, \alpha) \right) + 3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}(t, \alpha) \right) + 3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}(t, \alpha) \right) + \frac{\partial u}{\partial \alpha}(t, \alpha) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial t^3} (te^{\alpha t}) + 3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (te^{\alpha t}) + 3 \frac{\partial}{\partial t} (te^{\alpha t}) + te^{\alpha t} = 3(\alpha + 1)^2 e^{\alpha t} + t(\alpha + 1)^3 e^{\alpha t} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Derivando nuevamente con respecto a α , obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3}{\partial t^3} (t^2 e^{\alpha t}) + 3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (t^2 e^{\alpha t}) + 3 \frac{\partial}{\partial t} (t^2 e^{\alpha t}) + t^2 e^{\alpha t} \\ &= 6(\alpha + 1)e^{\alpha t} + 6(\alpha + 1)^2 t e^{\alpha t} + t^2 (\alpha + 1)^3 e^{\alpha t} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Notemos a continuación que se tiene la siguiente propiedad:

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} (t^k e^{\alpha t})_{\alpha=m_1} = \frac{d^i}{dt^i} (t^k e^{m_1 t}),$$

donde k es un entero no negativo. Usando esta propiedad, y evaluando (4.4), (4.5) y (4.6) para $\alpha = m_1$ se obtienen respectivamente las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^3}{dt^3} (e^{m_1 t}) + 3 \frac{d^2}{dt^2} (e^{m_1 t}) + 3 \frac{d}{dt} (e^{m_1 t}) + e^{m_1 t} = (m_1 + 1)^3 e^{m_1 t}, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^3}{dt^3} (te^{m_1 t}) + \frac{d^2}{dt^2} (te^{m_1 t}) + \frac{d}{dt} (te^{m_1 t}) + te^{m_1 t} \\ &= 3(m_1 + 1)^2 e^{m_1 t} + t(m_1 + 1)^3 e^{m_1 t}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{d^3}{dt^3}(t^2 e^{m_1 t}) + \frac{d^2}{dt^2}(t^2 e^{m_1 t}) + \frac{d}{dt}(t^2 e^{m_1 t}) + t^2 e^{m_1 t} \\ &= 6(m_1 + 1)e^{m_1 t} + 6(m_1 + 1)^2 t e^{m_1 t} + t^2(m_1 + 1)^3 e^{m_1 t}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pero $m_1 = -1$, por lo que los segundos miembros de (4.7), (4.8) y (4.9), son cero. Se obtiene entonces que las funciones

$$y_1(t) = e^{m_1 t}, \quad y_2(t) = t e^{m_1 t}, \quad y_3(t) = t^2 e^{m_1 t}$$

son soluciones de la ecuación diferencial. Veamos que son soluciones linealmente independientes. Para esto evaluamos el wronskiano

$$W(y_1, y_2, y_3)(t) = \begin{vmatrix} e^{m_1 t} & t e^{m_1 t} & t^2 e^{m_1 t} \\ m_1 e^{m_1 t} & e^{m_1 t} + m_1 t e^{m_1 t} & 2t e^{m_1 t} + t^2 m_1 e^{m_1 t} \\ m_1^2 e^{m_1 t} & 2m_1 e^{m_1 t} + m_1^2 t e^{m_1 t} & 2e^{m_1 t} + 4t m_1 e^{m_1 t} + t^2 m_1^2 e^{m_1 t} \end{vmatrix}$$

en $t = 0$, obteniendo

$$W(y_1, y_2, y_3)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_1 & 1 & 0 \\ m_1^2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

por lo que estas soluciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. La solución general del problema es finalmente

$$y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{m_1 t}.$$

El caso general se demuestra de la misma forma, aunque claramente en forma más técnica. En este caso m_1 es raíz real de multiplicidad n , así que el polinomio característico tiene la forma

$$p_n(m) = a_n(m - m_1)^n.$$

La base de soluciones está dada por el conjunto de soluciones linealmente independientes

$$y_1(t) = e^{m_1 t}, y_2(t) = te^{m_1 t}, \dots, y_n(t) = t^{n-1}e^{m_1 t},$$

por lo que la solución general es

$$y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_n t^{n-1})e^{m_1 t}.$$

Caso 3. Suponemos ahora que el polinomio característico $p_n(m)$ tiene una raíz real m_1 de multiplicidad k y el resto de las raíces son reales y simples. Razonando como en los casos anteriores se puede demostrar que una base de soluciones está formada de la siguientes manera. Para la raíz m_1 se obtienen las soluciones

$$y_1(t) = e^{m_1 t}, y_2(t) = te^{m_1 t}, \dots, y_k(t) = t^{k-1}e^{m_1 t},$$

y para el resto de las raíces $m_{k+1}, \dots, m_n$, las soluciones

$$y_{k+1}(t) = e^{m_{k+1} t}, \dots, y_n(t) = e^{m_n t}.$$

Estas n funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. La solución general se puede escribir entonces como

$$y(t) = (c_1 + \dots + c_k t^{k-1})e^{m_1 t} + c_{k+1}e^{m_{k+1} t} + \dots + c_n e^{m_n t}.$$

Caso 4. Las raíces del polinomio característico $p_n(m)$ son todas reales y son tales que dos de ellas tienen multiplicidad, m_1 con multiplicidad k_1 y m_2 con multiplicidad k_2 , el resto de las raíces (si es que existen) $m_{k_1+k_2+1}, \dots, m_n$, son simples. En este caso la base de soluciones está formada por las funciones

$$y_1(t) = e^{m_1 t}, \dots, y_{k_1}(t) = t^{k_1-1}e^{m_1 t}$$

asociadas a la raíz m_1 ,

$$y_{k_1+1}(t) = e^{m_2 t}, y_{k_1+2}(t) = te^{m_2 t}, \dots, y_{k_1+k_2}(t) = t^{k_2-1}e^{m_2 t}$$

asociadas a la raíz m_2 , y

$$y_{k_1+k_2+1}(t) = e^{m_{k_1+k_2+1}t}, \dots, y_n(t) = e^{m_n t}$$

que están asociadas al resto de las raíces. Estas n funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$ y por lo tanto la solución general se puede escribir como

$$y(t) = (c_1 + \dots + c_{k_1} t^{k_1-1})e^{m_1 t} + (c_{k_1+1} + \dots + c_{k_1+k_2} t^{k_2-1})e^{m_2 t} \\ + c_{k_1+k_2+1} e^{m_{k_1+k_2+1} t} + \dots + c_{m_n} e^{m_n t}.$$

Ejemplo. Resuelva la ecuación diferencial

$$y^{(iv)} - 2y'' + y = 0$$

El polinomio característico correspondiente es

$$p(m) = m^4 - 2m^2 + 1 = (m^2 - 1)^2 = (m + 1)^2(m - 1)^2$$

que tiene las raíces $m_1 = 1$, $m_2 = -1$, ambas con multiplicidad 2, con lo que la base de soluciones está dada por

$$e^t, \quad te^t, \quad e^{-t}, \quad te^{-t}.$$

La solución general es entonces

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + (c_3 + c_4 t)e^{-t}.$$

Caso 5. Suponemos que $p_n(m)$ tiene un par de raíces complejas conjugadas $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$, y el resto de las raíces $m_3, \dots, m_n$ son reales y simples. Tal como antes se puede demostrar que para las raíces m_1 y m_2 se obtienen las soluciones reales

$$y_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t \quad y_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

y para el resto de las raíces las soluciones

$$e^{m_3 t}, \dots, e^{m_n t}.$$

Así la solución general se escribe como

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t + c_3 e^{m_3 t} + \dots + c_{m_n} e^{m_n t}.$$

Ejemplo. Resuelva la ecuación diferencial

$$y''' - 8y = 0$$

El polinomio característico correspondiente es

$$p(m) = m^3 - 8 = (m - 2)(m^2 + 2m + 4)$$

que tiene las raíces $m_1 = 2$, $m_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $m_3 = -1 - i\sqrt{3}$, con lo que la base de soluciones está dada por

$$e^{2t}, \quad e^{-t} \cos(\sqrt{3}t), \quad e^{-t} \sin(\sqrt{3}t).$$

La solución general es entonces

$$y(t) = c_1 e^{2t} + (c_2 \cos(\sqrt{3}t) + c_3 \sin(\sqrt{3}t))e^{-t}.$$

Consideremos un último caso.

Caso 6. Suponemos que el polinomio característico $p_n(m)$ tiene una raíz compleja, $m_1 = \alpha + i\beta$ de multiplicidad k , y por lo tanto tiene también a $m_2 = \alpha - i\beta$, como raíz con multiplicidad k . Para simplificar vamos a suponer que no hay más raíces lo que implica que $n = 2k$. En este caso se puede demostrar que la base de soluciones esta formada por las funciones:

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t$$

$$e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

De esta forma la solución general es

$$y(t) = e^{\alpha t} (c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1}) \cos \beta t \\ + e^{\alpha t} (d_1 + d_2 t + \dots + d_k t^{k-1}) \sin \beta t.$$

Ejercicio. Encuentre la base de soluciones y la solución general si en Caso 6 se tiene que $n > 2k$ y además el polinomio característico tiene $n - 2k$ raíces reales y simples.

Ejemplo. Encuentre la solución general para la ecuación diferencial

$$y^{(iv)} + y = 0. \tag{4.10}$$

El polinomio característico es

$$p_4(m) = m^4 + 1 = (m^2 - i)(m^2 + i),$$

que tiene como raíces a

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{i}, \quad m_{3,4} = \pm\sqrt{-i}.$$

Estas se pueden escribir como

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} & m_2(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ m_3(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} & m_4(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

La base de soluciones es entonces

$$e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

La solución general se puede representar como

$$y(t) = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \left(c_1 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \left(d_1 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + d_2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

5. MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Este método nos va a permitir encontrar soluciones particulares de algunas ecuaciones diferenciales con coeficientes variables. Comencemos con la ecuación diferencial

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

Como siempre suponemos que a_2, a_1 , y a_0, g son funciones que satisfacen la condición (H_1) en un intervalo I . La ecuación la escribimos en la forma

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = f(t) \tag{5.1}$$

donde

$$P(t) = \frac{a_1}{a_2}(t), \quad Q(t) = \frac{a_0}{a_2}(t), \quad f(t) = \frac{g}{a_2}(t).$$

La ecuación homogénea asociada es

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = 0, \quad (5.2)$$

para la cual suponemos conocida una base de soluciones y_1, y_2 . Así, la solución general de esta ecuación es

$$y_h(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t).$$

El método para encontrar una solución particular $y_p(t)$ de (5.1) consiste en suponer

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

y reemplazar en (5.1) para encontrar dos ecuaciones para las funciones incógnitas u_1 y u_2 . Derivando y reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned} & u_1(t) \underbrace{[y_1'' + P(t)y_1' + Q(t)y_1]}_{=0} + u_2(t) \underbrace{[y_2'' + P(t)y_2' + Q(t)y_2]}_{=0} + P(t)u_1'(t)y_1(t) \\ & + P(t)u_2'(t)y_2(t) + 2u_1'(t)y_1'(t) + 2u_2'(t)y_2'(t) + u_1''(t)y_1(t) + u_2''(t)y_2(t) = f(t), \end{aligned}$$

que dado que y_1 e y_2 satisfacen la ecuación homogénea se puede escribir como

$$\begin{aligned} & P(t)[u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t)] \\ & + u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) + \frac{d}{dt}[u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t)] = f(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Como necesitamos 2 ecuaciones para u_1 y u_2 suponemos que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0, \quad (5.4)$$

quedando la ecuación (5.3) como

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = f(t). \quad (5.5)$$

Ecuaciones (5.4) y (5.5) son dos ecuaciones para u_1 y u_2 . Usando matrices estas toman la forma

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Usando la regla de Kramer se obtiene que

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \quad y \quad u_2'(t) = \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)}.$$

Notamos que $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ porque y_1, y_2 son linealmente independientes en t . Integrando las expresiones para u_1' y u_2' se obtiene

$$u_1(t) = C_1 - \int \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt, \quad y \quad u_2(t) = C_2 + \int \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt,$$

de donde

$$\begin{aligned} & u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = \\ & = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) - y_1(t) \int \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt. \end{aligned}$$

Como los dos primeros términos forman parte de la solución de la ecuación homogénea podemos tomar la solución particular como

$$y_p(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt.$$

Con esto la solución general de la ecuación es

$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + y_p(t).$$

Ejemplo. Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = (t+5)^2 e^{2t}.$$

La ecuación homogénea asociada es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0,$$

con polinomio característico $(m-2)^2 = 0$, y por lo tanto $m = 2$ es raíz de multiplicidad 2. De aquí que la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}.$$

Para encontrar la solución particular de la no homogénea, usamos variación de parámetros. Se obtiene:

$$y_p(t) = -e^{2t}\left(\frac{t^4}{4} + \frac{10}{3}t^3 + \frac{25}{2}t^2\right) + te^{2t}\left(\frac{t^3}{3} + 5t^2 + 25t\right)$$

y, finalmente, la solución general es:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + y_p(t).$$

Estudiemos a continuación como extender el método para ecuaciones de orden superior. Consideremos el siguiente caso.

$$y''' + P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = f(t), \quad (5.6)$$

donde las funciones coeficientes y f son continuas en un intervalo I . Como antes, suponemos conocida una base de soluciones $\{y_1, y_2, y_3\}$ de la ecuación homogénea asociada y postulamos como solución particular de (5.6)

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + u_3(t)y_3(t). \quad (5.7)$$

Derivando esta expresión se obtiene

$$y_p'(t) = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t) + u_3(t)y_3'(t) \quad (5.8)$$

donde hemos impuesto la condición de que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_3'(t)y_3(t) = 0. \quad (5.9)$$

Derivando (5.8) e imponiendo que

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_3'(t)y_3'(t) = 0, \quad (5.10)$$

se obtiene

$$y_p''(t) = u_1(t)y_1''(t) + u_2(t)y_2''(t) + u_3(t)y_3''(t). \quad (5.11)$$

Derivando esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned} y_p'''(t) &= u_1(t)y_1'''(t) + u_2(t)y_2'''(t) + u_3(t)y_3'''(t) \\ &\quad + u_1'(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2''(t) + u_3'(t)y_3''(t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Reemplazando (5.7), (5.8), (5.11) y (5.12) en (5.6) y utilizando que y_1, y_2, y_3 son soluciones de la ecuación homogénea asociada, se obtiene

$$u_1'(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2''(t) + u_3'(t)y_3''(t) = f(t). \quad (5.13)$$

Las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.13) se pueden escribir como el sistema

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

para las incógnitas u'_1, u'_2, u'_3 . Así, usando la regla de Kramer, se obtiene que:

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= f(t) \frac{W(y_2, y_3)}{W(y_1, y_2, y_3)} \\ u'_2(t) &= f(t) \frac{W(y_3, y_1)}{W(y_1, y_2, y_3)} \\ u'_3(t) &= f(t) \frac{W(y_1, y_2)}{W(y_1, y_2, y_3)}, \end{aligned}$$

donde $W(y_i, y_j)$ denota el wronskiano de las funciones y_i, y_j para $j = 1, 2, 3$, y $W(y_1, y_2, y_3)$ el wronskiano de las funciones y_1, y_2, y_3 . Como en el caso anterior estas expresiones se integran y se forma

$$u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + u_3(t)y_3(t),$$

de donde se obtiene una solución particular.

En forma enteramente similar se puede encontrar una fórmula para encontrar una solución particular para una ecuación lineal de orden n . Esto se deja como ejercicio.

Para usar el método de variación de parámetros hay que conocer una base de soluciones de la ecuación homogénea asociada. Vamos a considerar a continuación una clase de ecuaciones diferenciales a coeficientes variables donde esto es simple.

Ecuación de Euler-Cauchy. Tiene la forma:

$$a_n t^n y^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 t y' + a_0 y = g(t), \quad (5.14)$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes con $a_n \neq 0$ y donde suponemos que $t > 0$. La ecuación homogénea asociada es

$$a_n t^n y^{(n)} + \dots + a_1 t y' + a_0 y = 0. \quad (5.15)$$

Afirmamos que con la transformación de variable independiente $t = e^\tau$ la ecuación (5.14) y la ecuación (5.15), se transforman en ecuaciones a coeficientes constantes. Ilustramos esto para la ecuación de segundo orden.

$$a_2 t^2 y'' + a_1 t y' + a_0 y = g(t). \quad (5.16)$$

La ecuación homogénea asociada es

$$a_2 t^2 y'' + a_1 t y' + a_0 y = 0. \quad (5.17)$$

Denotando por $\bar{y}(\tau) = y(e^\tau)$ y derivando se obtiene respectivamente:

$$t y' = \frac{d\bar{y}}{d\tau} \quad \text{y} \quad t^2 y'' = \frac{d^2 \bar{y}}{d\tau^2} - \frac{d\bar{y}}{d\tau}.$$

De esta forma la ecuación homogénea asociada

$$a_2 t^2 y'' + a_1 t y' + a_0 y = 0,$$

se transforma en la ecuación a coeficientes constantes siguiente:

$$a_2 \frac{d^2 \bar{y}}{d\tau^2} + (a_1 - a_2) \frac{d\bar{y}}{d\tau} + a_0 \bar{y} = 0.$$

El polinomio característico correspondiente es

$$p(m) = a_2 m^2 + (a_1 - a_2)m + a_0.$$

Denotando por m_1 y m_2 las raíces de este polinomio tenemos 3 casos.

Caso 1. m_1 y m_2 son reales y distintas. En este caso una base de soluciones es

$$\bar{y}_1(\tau) = e^{m_1 \tau}, \quad \bar{y}_2(\tau) = e^{m_2 \tau}.$$

Caso 2. $m_1 = m_2 = m$. Una base de soluciones es

$$\bar{y}_1(\tau) = e^{m\tau}, \quad \bar{y}_2(\tau) = \tau e^{m\tau}.$$

Caso 3. Las raíces son complejas (conjugadas), $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, con $\beta \neq 0$. En este caso una base de soluciones es

$$\bar{y}_1(\tau) = e^{\alpha\tau} \cos \beta\tau, \quad \bar{y}_2(\tau) = e^{\alpha\tau} \sin \beta\tau.$$

Conocida estas bases, las expresamos en término de la variable t para obtener las bases correspondientes para la ecuación (5.17). Se tiene respectivamente:

Caso 1.

$$y_1(t) = t^{m_1}, \quad y_2(t) = t^{m_2}.$$

Caso 2.

$$y_1(t) = t^m, \quad y_2(t) = t^m \log t.$$

Caso 3.

$$y_1(t) = t^\alpha \cos \beta(\log t), \quad y_2(t) = t^\alpha \sin \beta(\log t).$$

Estamos entonces en posición de obtener una solución particular de la ecuación (5.16) por medio del método de variación de parámetros. Sigamos con un ejemplo.

Ejemplo. Resuelva la ecuación diferencial

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = t^4 e^t.$$

Haciendo el cambio de variable $t = e^\tau$ la ecuación homogénea asociada

$$t^2 y'' - 2ty' + 2y = 0,$$

se transforma en

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d\tau^2} - 3 \frac{d\bar{y}}{d\tau} + 2\bar{y} = 0.$$

El polinomio característico es $p(m) = m^2 - 3m + 2$, con raíces $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. De aquí que la base de soluciones es

$$\bar{y}_1(\tau) = e^\tau, \quad \bar{y}_2(\tau) = e^{2\tau}.$$

Volviendo a la variable t esta base queda

$$y_1(t) = t, \quad y_2(t) = t^2,$$

por lo que la solución general de la ecuación es

$$y_h(t) = c_1 t + c_2 t^2.$$

Para encontrar la solución particular usando variación de parámetros, partiendo de la ecuación escrita como

$$y'' - \frac{2y'}{t} + \frac{2y}{t} = t^2 e^t.$$

Ponemos $y_p = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$ donde u_1, u_2 satisfacen:

$$u_1'(t) = \frac{-y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)},$$

$$u_2'(t) = \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)}.$$

Calculando el wronskiano, se obtiene

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2.$$

Entonces

$$u_1'(t) = -t^2 e^t, \quad \text{y} \quad u_2'(t) = t e^t.$$

Integrando, se tiene

$$u_1(t) = - \int t^2 e^t dt = -t^2 e^t + 2t e^t - 2e^t,$$

y

$$u_2(t) = \int t e^t dt = t e^t - e^t.$$

Con esto la solución de la ecuación queda

$$y(t) = c_1 t + c_2 t^2 + u_1(t)t + u_2(t)t^2 = c_1 t + c_2 t^2 + t^2 e^t - 2t e^t.$$

Nota. Observamos que un procedimiento alternativo al expuesto consiste en transformar la ecuación.

$$a_2 t^2 y'' + a_1 t y' + a_0 y = g(t)$$

por medio del cambio de variables $t = e^\tau$, a

$$a_2 \frac{d^2 \bar{y}}{d^2 \tau} + (a_1 - a_2) \frac{d \bar{y}}{d \tau} + a_0 \bar{y} = g(e^\tau),$$

resolver esta ecuación a coeficientes constantes, y volver después a las expresiones en términos de la variable t .

6. MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este método nos va a servir para encontrar soluciones particulares de la ecuación lineal no homogénea a coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t), \quad (6.1)$$

donde $g : I \mapsto \mathbb{R}$ es una función continua y $a_1' \dots, a_n$ son constantes reales.

Introducimos una notación operacional denotando por

$$D = \frac{d}{dt}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \dots, D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Así la ecuación diferencial anterior la podemos escribir como

$$(a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0 I)y = g(t), \quad (6.2)$$

donde I denota el operador identidad. La expresión

$$P(D) = a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0 I, \quad (6.3)$$

la llamamos un operador diferencial de orden n (a coeficientes constantes). Como se puede ver inmediatamente $P(D)$ es un operador lineal sobre el espacio vectorial de las funciones $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Como motivación veremos algunos casos particulares de operadores diferenciales. Consideremos los tres operadores diferenciales:

$$P(D) = D^2 + D, \quad Q(D) = D(D + I), \quad R(D) = (D + I)D.$$

Se tiene

$$P(D)y = (D^2 + D)y = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt},$$

$$Q(D)y = D(D + I)y = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} + y\right) = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt},$$

y

$$R(D)y = (D + I)Dy = \left(\frac{d}{dt} + I\right)\frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}$$

por lo tanto $P(D) = Q(D) = R(D)$, es decir

$$D^2 + D = D(D + I) = (D + I)D,$$

que interpretamos como que $P(D) = D^2 + D$ se puede factorizar en 2 factores que conmutan. En forma similar se demuestran los siguientes casos.

Para a y b números reales y n un entero positivo, se tiene:

$$(D^2 + (a + b)D + abI) = (D + aI)(D + bI) = (D + bI)(D + aI),$$

$$(D^2 + (a + b)D + abI)^n = (D + aI)^n(D + bI)^n = (D + bI)^n(D + aI)^n,$$

y si m es otro entero positivo, se tiene

$$(D^2 + (a + b)D + abI)^n(D^2 + (c + d)D + cdI)^m$$

$$= (D + aI)^n(D + bI)^n(D + cI)^m(D + dI)^m$$

$$\begin{aligned}
&= (D + bI)^n (D + aI)^n (D + dI)^m (D + cI)^m \\
&= (D + cI)^m (D + aI)^n (D + dI)^m (D + bI)^n \\
&= (D^2 + (c + d)D + cdI)^m (D^2 + (a + b)D + abI)^n.
\end{aligned}$$

Similarmente si $a_1, \dots, a_n$ son números reales, se tiene:

$$(D + a_1 I) \cdots (D + a_n I) = \prod_{j=1..n} (D + a_{k(j)} I)$$

donde $\{k(1), \dots, k(n)\}$ es cualquier reordenamiento de $\{1, \dots, n\}$. Note que esta expresión es también cierta si los $a_1, \dots, a_n$ son números complejos.

Finalmente, si además $b_1, \dots, b_n$ son números reales se tiene

$$\begin{aligned}
&(D^2 + (a_1 + b_1)D + a_1 b_1 I) \cdots (D^2 + (a_n + b_n)D + a_n b_n I) \\
&= \prod_{j=1..n} (D^2 + (a_{k(j)} + b_{k(j)})D + a_{k(j)} b_{k(j)} I)
\end{aligned}$$

Consideremos nuevamente la ecuación diferencial (6.2), que reescribimos como

$$p(D)y = g(t), \tag{6.4}$$

con $p(D)$ dado por (6.3). La ecuación homogénea asociada es

$$p(D)y = 0, \tag{6.5}$$

para la cual sabemos como encontrar sus soluciones. Hemos visto que estas soluciones forman un espacio vectorial lineal de dimensión n . Este espacio es exactamente el kernel del operador $p(D)$. Por abuso de notación $p(D)$ lo llamaremos también un polinomio (diferencial).

En el método de coeficientes indeterminados es conveniente introducir el concepto de polinomio anulador. Sea u una función suficientemente diferenciable y supongamos que $q(D)$ es un polinomio diferencial tal que $q(D)u = 0$. Entonces decimos que $q(D)$ es un polinomio anulador de u . Notamos que equivalentemente u debe estar en el kernel del operador $q(D)$.

En forma elemental se tiene:

Si $u(t) = k = cte$, entonces $D^n k = \frac{d^n k}{dt^n} = 0$ para todo $n \geq 1$.

Si $u(t) = t^n$, n entero positivo, entonces $D^m u = \frac{d^m u(t)}{dt^m} = 0$ para todo entero $m > n$.

Como consecuencia de esto último si

$$u(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1} \quad (6.6)$$

donde $c_0, \dots, c_{n-1}$ son constantes reales, entonces $D^m u = 0$, para todo entero $m \geq n$. Es decir D^m , $m \geq n$, es un anulador del polinomio en (6.6).

A continuación vamos a estudiar algunos casos particulares importantes.

■ El operador

$$p(D) = (D - \alpha)^n \quad (6.7)$$

es un polinomio anulador de las siguientes funciones:

$$e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, \dots, t^{n-1} e^{\alpha t}, \quad n \geq 1, \quad (6.8)$$

equivalentemente todas estas funciones están en $\ker p(D)$.

En efecto, $p(D)u = 0$ es equivalente a la ecuación diferencial homogénea:

$$(D - \alpha)^n u = \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) u = 0,$$

que tiene por polinomio característico a $p(m) = (m - \alpha)^n$ (usamos la misma letra para denotar el polinomio). Como el conjunto de raíces de este polinomio esta formando por una raíz real de multiplicidad n , entonces es claro que la familia de funciones (6.8) son anuladas por el polinomio diferencial, más aun forman una base de soluciones para la ecuación diferencial $p(D)u = 0$.

Ejercicio. Encuentre un polinomio que anule a $u(t) = e^{-3t} + te^t$.

Solución. Se tiene que $(D + 3)$ anula a e^{-3t} y que $(D - 1)^2$ anula a te^t , por lo tanto $(D + 3)(D - 1)^2$ es un polinomio anulador de u .

■ El operador diferencial

$$p(D) = [D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n. \quad (6.9)$$

donde α, β son números reales con $\beta \neq 0$, es anulador de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{n-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{n-1} e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned} \quad (6.10)$$

En efecto, el polinomio característico correspondiente a la ecuación $p(D)y = 0$ es

$$p(m) = [m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^n,$$

y como

$$m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

tiene como raíces $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, se tiene que m_1 y m_2 con multiplicidad n son las únicas raíces del polinomio $p(m)$. Entonces la familia de funciones (6.10) son anuladas por el polinomio diferencial, y como antes forman una base de soluciones para la ecuación diferencial $p(D)u = 0$ correspondiente.

Ejercicio. Encuentre un polinomio anulador de

$$\cos \beta t, \quad \sin \beta t, \quad \beta \neq 0$$

Solución. En ambos casos es $(D^2 + \beta^2)$.

Ejercicio. Encuentre un polinomio anulador de

$$t \cos \beta t, t \sin \beta t.$$

Solución. $(D^2 + \beta^2)^2$.

Pasamos a continuación a describir el método de los coeficientes indeterminados.

Consideremos la ecuación a coeficientes constantes (6.4), que reescribimos como

$$p(D)y = g(t),$$

donde $p(D)$ está definido en (6.3), es decir

$$p(D) = a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0.$$

La ecuación homogénea asociada de la ecuación (6.4) es

$$p(D)y = 0, \tag{6.11}$$

con polinomio característico $p(m) = 0$. Supongamos que las raíces de este polinomio $m_1, \dots, m_l$ son reales y tienen multiplicidad $k_1, \dots, k_l$, respectivamente, de manera que

$$p(m) = a_n (m - m_1)^{k_1} \dots (m - m_l)^{k_l}, \tag{6.12}$$

donde $k_1 + \dots + k_l = n$. Entonces es fácil ver que $p(D)$ admite la factorización

$$p(D) = a_n (D - m_1 I)^{k_1} \dots (D - m_l I)^{k_l}, \tag{6.13}$$

y viceversa si $p(D)$ se puede factorizar como en (6.13) entonces $p(m)$ se puede factorizar como en (6.12).

Supongamos ahora que el polinomio característico $p(m)$ de (6.11) contiene un par de raíces complejas conjugadas $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, entonces $p(m)$

contendrá el factor $m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)$. Si además estas raíces tienen multiplicidad k entonces $p(m)$ contendrá el factor $[m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^k$. En este caso el polinomio $p(D)$ contendrá el correspondiente factor $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^k$ y viceversa.

Como el polinomio anulador $p(m)$ siempre se podrá factorizar en expresiones que contengan términos de la forma $(m - \alpha)^j$, $[m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^k$ (teorema fundamental del algebra) es claro que $p(D)$ se puede factorizar similarmente en factores de la forma $(D - \alpha)^j$, $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^k$.

De los argumentos anteriores es claro que si $g(t)$ es una de las siguientes funciones

- (a) una constante k ;
- (b) un polinomio en t ;
- (c) una función exponencial $e^{\alpha t}$;
- (d) una función trigonométrica de la forma $\sin \beta t$, o $\cos \beta t$;
- (e) productos de estas funciones
- (f) combinaciones lineales de estas funciones,

entonces es siempre posible encontrar un polinomio anulador $p(D)$ de esta función $g(t)$.

Supongamos que para la ecuación (6.4) conocemos un polinomio anulador $q(D)$ de la función g , y multipliquemos ambos miembros de esta ecuación por $q(D)$, entonces

$$q(D)p(D)y = q(D)g = 0.$$

Así y (la solución general de ecuación (6.4)) es también solución de una ecuación homogénea a coeficientes constantes (de orden n_1 mayor que n). Poniendo $r(D) = q(D)p(D)$, esta ecuación se escribe

$$r(D)z = 0, \tag{6.14}$$

ecuación homogénea a coeficientes constantes que sabemos como resolver. En efecto tenemos que encontrar n_1 soluciones linealmente independientes de esta ecuación para formar una base B .

Sean $\{y_1, \dots, y_n\}$ n soluciones linealmente independientes de la ecuación (6.11), es decir que satisfacen, $p(D)y_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Entonces también se satisface que $r(D)y_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, es decir son n soluciones linealmente independientes de (6.14). Supongamos que $y_{n+1}, \dots, y_{n_1}$ son $n_1 - n$ soluciones adicionales de (6.14) tales que $\{y_1, \dots, y_{n_1}\}$ forman una base de soluciones de (6.14) (note $y_{n+1}, \dots, y_{n_1}$ no pueden ser soluciones de (6.11)).

Como $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$, la solución general de (6.4) satisface la ecuación homogénea (6.14), se puede escribir como

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_1} c_i y_i(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t) + \sum_{i=n+1}^{n_1} c_i y_i(t),$$

donde $c_1, \dots, c_{n_1}$ son constantes. Ya que $\sum_{i=1}^n c_i y_i(t)$ forma parte de la solución general de (6.11), que llamamos antes y_h , se tiene entonces que $y_p(t) = y(t) - y_h(t)$ debe tener la forma

$$y_p(t) = \sum_{i=n+1}^{n_1} c_i y_i(t).$$

Esta expresión contiene $n_1 - n$ constantes indeterminadas las cuales se determinan reemplazando esta expresión en (6.4). De aquí el nombre del método de los coeficientes indeterminados.