



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

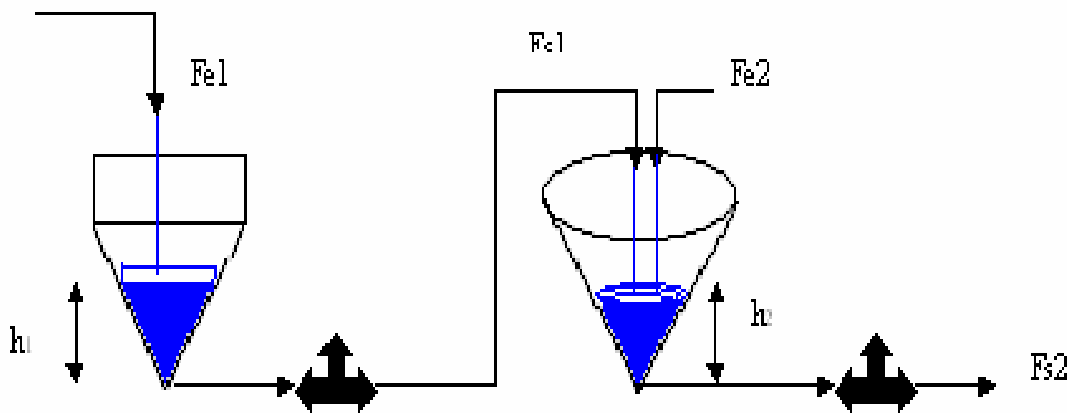
PROFESOR: Raúl Manasevich
AUXILIAR: Alfredo Núñez
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otoño 2007

UNIDAD N°5

SISTEMAS PLANOS NO LINEALES AUTÓNOMOS Y ESTABILIDAD

P1) (Tarea 3 2003, Prof. R. Manasevich)

Considere el sistema de 2 estanques dispuestos según la figura.



El estanque 1 es una pirámide regular de base cuadrada y el estanque 2 es un cono. Suponga que conoce algún dato que permita determinar el volumen de estas figuras dada una altura arbitraria.

Suponga que la densidad del fluido es siempre constante e igual a ρ . Suponga además que los flujos de entrada F_{e1} y F_{e2} son constantes.

- a) Encuentre el sistema de ecuaciones no lineal que modela la altura de los estanques $h_1(t)$ y $h_2(t)$. Suponga flujos de salida proporcionales a la raíz cuadrada de la diferencia de presiones en las válvulas.

Indicación: Deberán llegar a un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dh_1}{dt} &= f(h_1, h_2) \\ \frac{dh_2}{dt} &= g(h_1, h_2)\end{aligned}$$

- b) Suponga que se desea mantener una altura constante en ambos estanques e iguales a 1 metro. Linealizar el sistema en torno a este punto de operación.

Indicación: Aplique Taylor de orden 1 para una función de dos variables.

- c) Suponga que se tiene el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

donde A, B y C son constantes que dependen del sistema y f_1 y f_2 son los flujos de entradas constantes que le aplicamos.

- i) Compruebe que este sistema es similar al encontrado en la parte b).
- ii) Muestre que este sistema no puede tener soluciones oscilatorias.
- iii) Encuentre el punto crítico que posee este sistema linealizado y haga un cambio de coordenadas para que el origen del nuevo eje de coordenadas sea el único punto crítico (imponga condiciones para que esto se cumpla)
- iv) Ahora determine las relaciones entre esos coeficientes de tal forma que el punto crítico del sistema anterior sea estable y las condiciones para que sea inestable. Indique cada caso y resuelva.

Indicación: En las partes ii) iii) y iv) no trabajen con los valores de la parte anterior.

d)

- i) Suponga que ambos estanques surten dos predios contiguos. Se quiere que ambos estanques mantengan igual altura igual a 1 metro para que el nivel de riego sea el mismo, que valores de f_1 y f_2 sugeriría?
- ii) Suponga que quiere que el predio regado por el estanque 1 se quede sin agua y que el predio 2 se inunde, que valores de f_1 y f_2 sugeriría para que en un tiempo mínimo logre su deseo.

- e) Resuma lo que hizo en esta tarea (en palabras) y saque algunas conclusiones.

P2) (Tarea 4 2003, Prof. R. Manasevich)

Parte a)

Bosqueje los diagramas de fase de los siguientes sistemas:

- i) $\dot{x} = y, \dot{y} = x - y - x^3$
- ii) $\dot{x} = x^2 - y^2, \dot{y} = xy - 1$

Para aquello, encuentre puntos críticos, clasifíquelos, determine isoclinas, trayectorias y direcciones. Con todos esos desarrollos matemáticos bosqueje el diagrama de fase y con la ayuda de Maple compare sus resultados. (incluya en esa pregunta el diagrama de fase que le arrojó Maple)

Parte b)

Un modelo simple en Economía está dado por:

$$\dot{I} = I - KS, \dot{S} = I - CS - G$$

Donde $I(t)$ representa las entradas o ingresos “income” (cantidad de plata que se recibe), $S(t)$ es el rango de gastos, G es el gasto del Gobierno (constante), y C y K son constantes positivas.

- i) Grafique posibles curvas de solución cuando $C=1$ e interprete las soluciones en términos económicos. Que sucede cuando C es distinto de 1???
- ii) Grafique las curvas solución cuando $K=4$, $C=2$, $G=4$, $I(0)=15$, y $S(0)=5$. Que sucede para otras condiciones iniciales??

Hint: base sus análisis en los diagramas de fase que les indicaran como varía el Ingreso a medida que varío el Gasto, para cualquier condiciones inicial que ubiquen en el plano.

Parte c)

La potencia $P(t)$ generada por una rueda que gira debido a un chorro de agua y la cual adquiere velocidad $V(t)$ puede ser modelada por el siguiente sistema:

$$\dot{P} = -\alpha P + PV, \dot{V} = 1 - \beta V - P^2$$

donde α y β son constantes positivas. Describa la conducta cualitativa de este sistema cuando α y β varían y dé una interpretación física del resultado.

Parte d)

Dado que $\frac{d^3\eta}{d\tau^3} = -\eta \frac{d^2\eta}{d\tau^2}$ y $x = \frac{\eta \frac{d\eta}{d\tau}}{\frac{d^2\eta}{d\tau^2}}$, $y = \frac{\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2}{\eta \frac{d^2\eta}{d\tau^2}}$ y además $t = \log\left|\frac{d\eta}{d\tau}\right|$, pruebe que se

cumple:

$$\dot{x} = x(1 + x + y), \dot{y} = y(2 + x - y).$$

Luego bosqueje el diagrama de fase en el plano XY .

Parte e)

Explique los siguientes conceptos, importancia y dibuje cuando sea necesario:

- i) Punto crítico hiperbólico y no hiperbólico. Teorema de Hartman
- ii) Modelo Lotka-Volterra.
- iii) Ciclos Limites
- iv) Sistemas Hamiltonianos
- v) Caos (explique usando algunos ejemplos).
- vi) Ecuaciones de Lorentz, Circuito de Chua y la reacción de Belousov-Zhabotinski.

BONUS 1 (si lo hace, hágalo en una hoja por separado)

- i) Construya un sistema no lineal que tenga cuatro puntos críticos: dos puntos silla, un foco estable y un foco inestable.

BONUS 2 (si lo hace, hágalo en una hoja por separado)

- i) Aplicando leyes de Newton, encuentre la ecuación diferencial que rige a un péndulo simple no lineal de largo l .
- ii) Transforme este sistema de segundo orden a un sistema en el plano y obtenga los puntos críticos. Clasifique estos puntos según sean hiperbólicos o no hiperbólicos y sus características.
- iii) Según lo visto en clases, bosqueje el diagrama de fases en el plano y explique físicamente su significado. (Tome 4 condiciones iniciales para el ángulo y la velocidad angular inicial, una en algún punto crítico inestable, otra en las cercanías de algún punto crítico estable, otra en la transición u homoclina del diagrama, y otra lejos de los puntos críticos)

P3) (P5 Examen 2003, Prof. R. Manasevich)

En un hábitat cerrado autosuficiente coexisten 2 especies cuyas poblaciones están regidas por las ecuaciones:

$$\dot{x} = ax - bx^2 - cxy$$

$$\dot{y} = dy - ey^2 - fxy$$

a, b, c, d, e, f son constantes positivas, $c < f, ae < cd, cf < be$.

- i) Explique las ecuaciones y el tipo de relación entre las especies.
- ii) Encuentre puntos críticos
- iii) Clasifique los puntos críticos que pertenecen al primer cuadrante del plano xy (incluyendo el origen)
- iv) Aplique el cambio de variable $u = \ln(x), v = \ln(y)$ y obtenga el sistema no lineal de la forma:

$$\dot{u} = f(u, v)$$

$$\dot{v} = g(u, v)$$

- v) Suponga que se cumple

$$e^u = 1 + u$$

$$e^v = 1 + v$$

Obtenga el sistema correspondiente y analice sus puntos críticos.

- vi) Resuelva el sistema obtenido en la parte v), sabiendo que se cumple:

$$a = 1; b = 3; c = 1; d = 2; e = 1; f = 2$$