



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**PROFESOR: Raúl Manasevich**  
**AUXILIAR: Alfredo Núñez**  
**Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**  
**Semestre Otoño 2007**

## UNIDAD N°4 SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES

**P1) (P3 Examen 2000, Prof. R. Manasevich)**

Resuelva:  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{X}$

**P2) (P2 Examen 2001, Prof. R. Manasevich)**

Resuelva:  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{X}$

**P3) (P3 y P4 Control 3 2000, Prof. R. Manasevich)**

Resuelva:

i)  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \vec{X}$  ;      ii)  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \vec{X}$

**P4) (P1 Control 3 2001, Prof. R. Manasevich)**

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \vec{X}$$

- a) Encuentre base de soluciones. Exprese la solución general del problema en sus componentes.
- b) Encuentre la solución de (a) que satisface la condición inicial  $\vec{X}(0) = (0, 0, v_0, v_0)^T$ .

**P5) (P2 C3 2001, Prof. R. Manasevich)**

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Encuentre base de soluciones y exprese la solución general en sus componentes.

**P6)**

i) Resuelva:  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix} \vec{X}$ ; a, b, c, d constantes reales.

y luego resuelva:  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \vec{X}$ ; a constante.

ii) Resuelva:  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix} \vec{X}$

**P7) (Tarea 5(i) 2001, Prof. R. Manasevich)**

Resuelva:  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 0 \\ 15 & -10 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 8 \end{bmatrix} \vec{X}$ .

**P8) (Tarea 6 2001, Prof. R. Manasevich)**

Resuelva: i)  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \vec{X}$ ; ii)  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \vec{X}$

**P9) (Guía Control 3, Prof. R. Manasevich)**

i) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{X}$ ;

ii) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones no homogéneo:  $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} e^t \\ te^t \end{bmatrix}$

iii) Escriba la ecuación diferencial (1) como un sistema de ecuaciones de primer orden y resuelva

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 9y = 6e^t - 2t; \quad (1)$$

Sugerencia: Separe en homogénea y particular.

**P10) (P5 Examen 2002, Prof. R. Manasevich)**

(i) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & d \\ 0 & -\frac{bc}{d} & a \end{pmatrix} \text{ donde } a, b, c \text{ y } d \neq 0 \text{ son constantes}$$

(ii) Considere el sistema de ecuaciones  $x' = A(t)x$ , donde  $A: I \rightarrow M^{n \times n}$  es continua en el intervalo  $I$ . Sea  $\phi(t)$  una matriz (cada  $t$ ) formada por columnas que son soluciones de la ecuación diferencial. Demuestre que para cualquiera  $t, t_0 \in I$  la siguiente formula es verdadera:

$$|\phi(t)| = |\phi(t_0)| e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}$$

donde  $|\phi(t)|$  denote el determinante de la matriz  $\phi(t)$ . Suponga que las soluciones que forman  $\phi(t)$  son linealmente independientes.

**P11) (P3 Control 3 2001, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere los sistemas de la forma  $x' = Ax$ , donde

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{ii) } A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

a) En ambos casos determine una base de soluciones y la solución general escrita en sus componentes.

b) Para ambos casos dibuje, justificando matemáticamente sus resultados, las soluciones del sistema canónico correspondiente para  $t \geq 0$ . Note que en el segundo caso la ecuación está en la forma canónica.

**P12) (P1 Control 3 2002, Profesor Raúl Manasevich)**

a) Usando el Método de Variación de Parámetros resuelva:

$$X' = \begin{pmatrix} ab & -2a^2 \\ b^2 & -ab \end{pmatrix} X + f(t)$$

$$\text{para los casos: (i) } f(t) = \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}, X(0) = \begin{pmatrix} a^2 b^2 \\ -\frac{1}{a} \end{pmatrix}, \text{ ii) } f(t) = \begin{pmatrix} 2at \\ bt \end{pmatrix}, X(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{ab^2} \\ \frac{1}{a^2 b} - 1 \end{pmatrix}$$

**P13) (P2 Control 3 2002, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere el problema  $x' = Ax$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 2\omega & 0 & 0 \\ -a\omega & a & \omega & 0 \\ -b\omega & b & 0 & \omega \end{bmatrix}$$

Encuentre una base de soluciones y de ahí la solución general del problema.

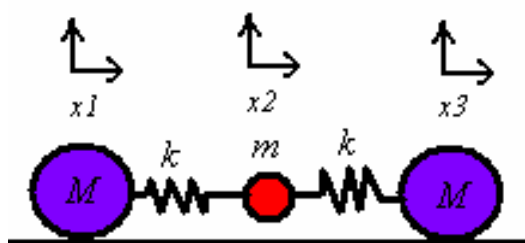
**P14) (P3 Control 3 2002, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere el movimiento longitudinal del sistema de 3 masas (M-m-M) y 2 resortes de constante k que unen las masas M con la masa central m. Las ecuaciones de movimiento para cada masa son:

$$Mx_1'' + k(x_1 - x_2) = 0$$

$$mx_2'' + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) = 0$$

$$Mx_3'' + k(x_3 - x_2) = 0$$



Encuentre las frecuencias y modos normales de oscilación del sistema. Explique sus resultados.

**P15) (P4 Control 3 2002, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere los sistemas de la forma  $x' = Ax$ , donde

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} a^2b^2 & -b^2 \\ a^2 & a^2b^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{ii) } A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$$

- En ambos casos determine una base de soluciones y la solución general.
- Para ambos casos dibuje, justificando matemáticamente sus resultados, los diagramas de fases correspondientes para  $t \geq 0$ . En la parte (i) haga  $a=b$ .

**P16) (P5 Control 3 2002, Prof. R. Manasevich)**

Considere los problemas  $x' = Ax$ , donde

$$\text{i) } \vec{X}' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix} \vec{X}; \quad \text{ii) } \vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Encuentre una base de soluciones y de ahí la solución general de cada problema.

Indicación: En la parte (i) haga  $a - \lambda = \mu$ , y note que en la ecuación característica se cumple que  $\mu = c$ .

**P17) (P1 Control 2 2000, Prof. R. Manasevich)**

Considere el problema:  $x' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} x$

a) Encuentre la solución  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ .

b) Transforme el sistema a la forma canónica  $(y_1, y_2)$ . Resuélvalo en estas coordenadas. En el plano  $y_1, y_2$  encuentre los lugares geométricos que describen las soluciones (independientes de  $t$ ) e indique mediante flechas como se mueven las soluciones cuando  $t$  crece (diagrama de fase).

**P18) (P2 Control 2 2000, Prof. R. Manasevich)**

Considere la ecuación:  $x' = Ax + e^{\mu t} b$ , donde  $b$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$  y  $A$  matriz de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Si imponemos que  $\mu$  no es un valor propio de  $A$ , encuentre una solución particular para esta ecuación.

**P19) (P3 Control 2 2000, Prof. R. Manasevich)**

Considere el problema con condición inicial

$$x'' = A(t)x$$

$$x(t_0) = a, x'(t_0) = b.$$

donde  $a, b$  vectores de  $\mathbb{R}^n$  conocidos y  $A(t)$  matriz de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  para cada  $t$  en el intervalo  $I$ .  $I$  intervalo,  $A$  es continua en  $I$ . Demuestre que este problema tiene solución única en  $I$ .

**P20) (P4 Control 2 2000, Prof. R. Manasevich)**

Considere la ecuación  $x'' + Ax = 0$  donde  $A$  es una matriz constante real de  $n \times n$ .

Supongamos también que  $A$  es simétrica y definida positiva. Encuentre la solución general de este problema.

**P21) (P5 Control 2 2000, Prof. R. Manasevich)**

Sea  $A$  una matriz real constante de  $n \times n$  tal que tiene  $n$  valores propios reales y distintos. Encuentre la solución general de la ecuación

$$tx' = Ax, t \geq 0$$

Indicación: Considere primero el caso  $n=1$  y luego genere un intento razonable para el caso general.

**P22) (P1 Control 2 2003, Prof. Raúl Manasevich)**

Considere el problema con condición inicial

$$x' = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

donde A es una matriz de n por n de números reales. Vimos en clases que la solución de este problema es  $x(t) = e^{tA}x_0$ , donde  $e^{tA}$  es la matriz exponencial de A. Recuerde que  $e^{0A} = I$ , donde I es la matriz identidad de n por n.

- (i) Demuestre que la matriz exponencial satisface la siguiente propiedad de semigrupo:

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \text{ para todo } t, s \text{ reales.}$$

Demuestre de aquí que  $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ .

- (ii) Sean A, B dos matrices reales n por n. Demuestre que:

$$e^{tA}B = Be^{tA}, \text{ para todo } t \text{ real si y solo si } AB=BA.$$

- (iii) Demuestre que

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}, \text{ para todo } t \text{ real si y solo si } AB=BA.$$

**P23) (P2 Control 2 2003, Prof. Raúl Manasevich)**

Encuentre la matriz exponencial y la solución general del sistema

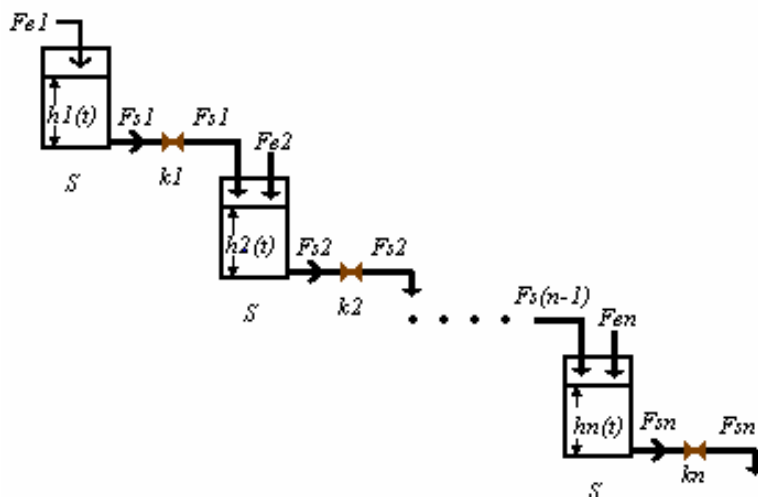
$$x' = Ax, \quad x(0) = c, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**P24) (P3 Control 2 2003, Prof. Raúl Manasevich)**

Considere un sistema con N estanques conectados, por los cuales entra y sale un líquido (ver figura). Los estanques tienen sección transversal constante igual a S.

Suponiendo que el líquido tiene densidad constante, que los flujos de salida  $F_{Si}$  son proporcionales a las variaciones de presión en ambos lados de las llaves, que todas las llaves son distintas, y que los flujos de entrada  $F_{Ei}$  son constantes, se pide:

- (i) Encontrar el sistema vectorial  $h' = Ah + f$  que modela las alturas de cada estanque.  
(ii) Resolver el sistema encontrado.



**P25) (P3 Examen 2003, Prof. R. Manasevich)**

Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$x' = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} x \quad a, b \in \mathbb{R}$$

encontrando la matriz exponencial, en todos los casos posibles.

**P25) (Tarea 5 2004, Prof. R. Manasevich)**

Responder las siguientes preguntas:

a)  $X' = AX$  A matriz de 3x3 cuyos valores propios satisfacen que:  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

Se satisface además que  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_1 I)) = 2$ . ¿Cual es la solución?.

b)  $X' = AX$  A matriz de 3x3 cuyos valores propios satisfacen que:  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

Se satisface además que  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_1 I)) = 1$ . ¿Cual es la solución?.

c)  $X' = AX$  A matriz de 3x3 cuyos valores propios satisfacen que:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Se satisface además que  $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_1 I)) = 2$ . ¿Cual es la solución?.

Resuelva los problemas de la forma  $X' = AX$

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

**P26) (Tarea 6 2004, Prof. R. Manasevich)**

Resuelva usando 6 métodos distintos los siguientes sistemas de ecuaciones, encontrando la matriz exponencial en cada caso:

$$\text{i) } X' = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} X, \text{ ii) } X' = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ b & b & a \end{bmatrix} X, \text{ iii) } X' = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} X$$

Métodos sugeridos: Método de los valores y vectores propios generalizado, Transformada de Laplace, Despejando y resolviendo como ecuación lineal orden 3, Teorema Cayley-Hamilton, Usando la forma canónica de Jordan, Usando la serie infinita.

**P27) (P1 Control 3 2004, Prof. Raúl Manasevich)**

Considere la ecuación diferencial  $x' = Ax$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

es una matriz real que satisface  $\det(A) \neq 0$ . Vamos a suponer que el polinomio característico de  $A$  tiene un solo valor propio  $\lambda_1$  real con multiplicidad dos y que  $\dim(\text{ker}(A - \lambda_1 I)) = 1$ , y que  $K$  es un vector propio. De clases sabemos que para formar la

solución general hay que encontrar un vector propio generalizado  $P$  linealmente independiente con  $K$ .

- Demuestre que  $P$  se puede encontrar como solución de la ecuación  $(A - \lambda_1 I)P = K$ .
- Demuestre que el representante  $\Lambda$  de  $A$  según la base  $\{K, P\}$  es  $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$ .
- Defina  $\kappa = [K, P]$ . Evalúe primero  $\kappa^{-1}K$  y  $\kappa^{-1}P$ . Demuestre entonces que  $\Lambda = \kappa^{-1}A\kappa$ .
- Defina  $x = \kappa y$  con  $y = [y_1, y_2]^T$ . Encuentre el sistema de ecuaciones diferenciales que satisface  $y$  (sistema canónico) y resuelva este sistema. Suponiendo que  $\lambda_1 < 0$ , que puede decir de la estabilidad del origen?

**P28) (P2 Control 3 2004, Prof. Raúl Manasevich)**

Sea  $\Phi(t), t \in \mathbb{R}$ , una matriz real  $n \times n$  de clase  $C^1$  (derivada continua). Suponga que  $\Phi(0) = I$  y que  $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$  para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ . Demuestre primero que existe una matriz  $A$  tal que  $\Phi(t) = e^{tA}$ . Demuestre a continuación que esta matriz  $A$  es única.

**P29) (P3 Control 3 2004, Prof. Raúl Manasevich)**

Resuelva el sistema  $x' = Ax$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & -b \\ 0 & a & -b & a \end{bmatrix}.$$

La solución se pide en la forma  $x(t) = e^{tA}x(0)$ .

Sugerencia. Escriba  $A = A_1 + aA_2$ , con  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$ , donde  $I_2$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ .

**P30) (P4 Control 3 2004, Prof. Raúl Manasevich)**

Encuentre la solución general del problema  $x' = Ax, x(0) = [0 \ 1 \ 0]^T$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

**P31) (P3a Examen 2004, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere la ecuación diferencial  $x' = Ax$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -17 & -5 \end{bmatrix},$$

- Resuelva el sistema e indique la naturaleza del punto crítico  $(0,0)$ .
- Expresa el sistema en su forma canónica y resuelva en estas coordenadas.
- Bosqueje el diagrama de fase del sistema canónico justificando matemáticamente sus resultados.



**P32) (P4 C2 2005, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere el sistema de la forma  $x' = Ax$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

- (a) Encuentre dos soluciones l.i. y luego la solución general.  
 (b) Encuentre la matriz K (la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A) y use la matriz para diagonalizar el sistema como en clases obteniendo un sistema de la forma:

$$Y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Y$$

Resuelva a continuación el sistema diagonalizado.

- (c) (2.0 puntos) Dibuje los lugares geométricos de la solución en plano de fase  $(y_1, y_2)$

**P33) (P1 C3 2005, Profesor Raúl Manasevich)**

Sea A una matriz de coeficientes reales que tiene la forma  $A = B + C$ , donde

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & 0_2 \\ 0_2 & A_1 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{bmatrix}$$

Aquí  $I_2$  y  $0_2$  son respectivamente la matriz identidad y la matriz nula 2 por 2.

Demuestre que  $e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{tA_1} & te^{tA_1} \\ 0_2 & e^{tA_1} \end{bmatrix}$

**P34) (P2 C3 2005, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere la ecuación diferencial  $x' = Ax$  donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

- (a) Encuentre la solución  $x(t) = [x_1(t)x_2(t)x_3(t)x_4(t)]^T$  de esta ecuación que satisface  $x(0) = [c_1c_2c_3c_4]^T$ .

- (b) Encuentre todas las condiciones iniciales  $x(0) = [c_1 c_2 c_3 c_4]^t$  para las que la solución satisface  $|x(t)| = e^{5t}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$

**P35) (P4 C3 2005, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere el sistema de ecuaciones

$$x_1' = 2x_1 - 3x_2, \quad x_2' = -3x_1 + 2x_2$$

- (a) Encuentre la solución de este sistema por medio de la exponencial de la matriz correspondiente.  
 (b) Reduzca el sistema a su forma canónica ( en las coordenadas  $(y_1, y_2)$  ). Encuentre los puntos críticos y clasifíquelos. Dibuje un numero suficiente de curvas para que de una idea clara del comportamiento de las soluciones en el plano de fase canónico.

**P36) (P3 Exámen 2005, Profesor Raúl Manasevich)**

- (a) Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$  con  $I_n$  la matriz identidad de  $n \times n$ . Demuestre que se cumple:

$$\cosh(t)I_{2n} = \frac{e^{tA} + e^{-tA}}{2}, \quad \sinh(t)I_{2n} = A \left[ \frac{e^{tA} - e^{-tA}}{2} \right]$$

- (b) Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$  con  $I_n$  la matriz identidad de  $n \times n$ . Demuestre que se cumple:

$$\cos(t)I = \frac{e^{tA} + e^{-tA}}{2}, \quad \sin(t)A = \left[ \frac{e^{tA} - e^{-tA}}{2} \right]$$

**P37) (P1 C2 2006, Profesor Raúl Manasevich)**

Recuerde que  $e^{tA}$ , A matriz real  $n \times n$ , es la única solución,  $t \in \mathbb{R}$ , de la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ X(0) &= I \end{aligned}$$

- (a) Demuestre que A, B son matrices reales  $n \times n$ :

$$AB = BA \Leftrightarrow e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB} = e^{tB} \cdot e^{tA}$$

- (b) Demuestre que  $e^{tA}$  es invertible para cada t y calcule su inversa.  
 (c) Suponga que la solución de (1) se puede escribir como:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)}(0) \cdot \frac{t^n}{n!}, \quad X^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n X(t)}{dt^n} \right|_{t=0}$$

Evalúe estas derivadas y encuentre una expresión de  $X(t)$  en función de la matriz A.

**P38) (P4a C2 2006, Profesor Raúl Manasevich)**

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} x$$

Indique la naturaleza el punto crítico, resuelva el sistema en la base canónica y bosqueje el diagrama de fases justificando matemáticamente sus resultados.

**P39) (P1 C3 2006, Profesor Raúl Manasevich)**

Encuentre la matriz exponencial y la solución general de sistema

$$x' = Ax, \quad x(0) = c$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & -a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$$

Si  $a \in \mathbb{R}$  determine el vector de constantes  $c$  de tal manera que todas las soluciones del sistema tiendan a cero cuando  $t$  tiende a infinito.

**P40) (P2 C3 2006, Profesor Raúl Manasevich)**

Dos masas  $m_1$  y  $m_2$  unidas con un resorte y un amortiguador proporcional a sus velocidades relativas están sometidas a fuerzas de resistencias por fricción  $c_1 x'_1$  y  $c_2 x'_2$ . Las ecuaciones de movimiento de masas son:

$$m_1 x''_1 = k(x_2 - x_1) - c_1 x'_1 - c(x'_1 - x'_2)$$

$$m_2 x''_2 = k(x_1 - x_2) - c_2 x'_2 - c(x'_2 - x'_1)$$

- Exprese el sistema de ecuaciones como uno de primer orden para las variables  $x_1(t) = x_1, x_2(t) = x_2, x_3(t) = x'_1$  y  $x_4(t) = x'_2$
- Encuentre la matriz exponencial y la solución general del sistema. Considere  $m_1 = m_2 = 1, c = 1, k = c_1 = c_2 = 2$
- Determine la solución del problema con condiciones iniciales  $x(0) = [0, 0, 1, 1]$

**P41) (P3 C3 2006, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = A(t)x$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

- Si  $a(t) = \tan(t), b(t) = \sec(t), c(t) = \cos(t)$  y  $d(t) = \cot(t)$  en el intervalo  $t \in (0, \pi/2)$  y  $\phi_1, \phi_2$  son soluciones linealmente independientes de la ecuación.  $\Phi(t) = [\phi_1, \phi_2]$ , entonces  $\det(\Phi(t)) = C \tan(t)$
- Si ahora  $a(t) = 2/t, b(t) = 4/t, c(t) = -4/t$  y  $d(t) = 2/t$  en el intervalo  $t > 0$ , encuentre una base de soluciones.

**P42) (P4 C3 2006, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = Ax$$

donde

$$(i) \ A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} \quad (ii) \ A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

- (a) Encuentre la solución de los sistemas por medio de la exponencial de la matriz correspondiente.
- (b) Reduzca si es necesario los sistemas a su forma canónica (en las coordenadas  $(y_1, y_2)$ ). Encuentre los puntos críticos y clasifíquelos. Dibuje un número suficientes de curvas para que de una idea clara del comportamiento de las soluciones en el plano de fase canónico, justificando matemáticamente sus resultados.

**P43) (P2 Exámen 2006, Profesor Raúl Manasevich)**

- (a) Sea  $Q_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números reales. Demuestre que:

$$e^{tQ_{\alpha, \beta}} = e^{t\alpha} R(t, \beta),$$

donde

$$R(t, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}$$

- (b) Sea  $N_1 = [N_{i,j}]$  una matriz  $n \times n$ , definida por  $N_{i,i+1} = 1$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $N_{i,j} = 0$  para todo otro par de subíndices  $i, j = 1, \dots, n$ . Encuentre  $e^{tN_1}$ .

- (c) Con la notación de (a) y (b), sea  $n=8$  y

$$J_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} Q_{\alpha, \beta} & O_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & Q_{\alpha, \beta} & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & Q_{\alpha, \beta} & O_2 \\ O_2 & O_2 & O_2 & Q_{\alpha, \beta} \end{bmatrix} + N_2$$

donde  $O_2$  es la matriz cero, dos por dos y  $N_2 = N_1^2$ . Demuestre que

$$e^{tJ_{\alpha, \beta}} = e^{t\alpha} \begin{bmatrix} R(t, \beta) & O_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & R(t, \beta) & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & R(t, \beta) & O_2 \\ O_2 & O_2 & O_2 & R(t, \beta) \end{bmatrix} e^{tN_2}$$

**P44) (P4 Exámen 2006, Profesor Raúl Manasevich)**

Considere el sistema de ecuaciones  $x' = Bx$

Donde B es una matriz 4 por 4 dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & -3 \\ -18 & -1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & -25 & -9 \\ 33 & 10 & 90 & 32 \end{bmatrix}$$

Se pide encontrar una base de soluciones (reales) para el sistema. Se da como información que el polinomio característico de B es

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 13)^2$$