



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROFESOR: Raúl Manasevich
AUXILIAR: Alfredo Núñez
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otoño 2007

UNIDAD N°2

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN N Y APLICACIONES

Dependencia e Independencia Lineal

P1) (P3 C1 2001, Prof. Raúl Manasevich)

Considere la ecuación diferencial:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

donde $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones continuas

a) Demuestre que el Wronskiano $W(t) = W(y_1, y_2)(t)$ de dos soluciones $y(t), y_1(t)$ de la ecuación satisface:

$$W(t) = Ce^{-\int p(t)dt}$$

b) Encuentre a continuación una expresión para $\frac{d}{dt} \left(\frac{y(t)}{y_1(t)} \right)$ en términos $W(t)$ e $y_1(t)$. A partir de aquí y de (a) encuentre finalmente $y(t)$ en términos de $y_1(t)$.

P2) (P3 C2 2001, Prof. Raúl Manasevich)

Sea la ecuación diferencial homogénea:

$$y''' + P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

donde suponemos que $P, Q, R : I \rightarrow \mathbb{R}$ son tres funciones continuas definidas en un intervalo real I

a) Suponiendo que $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ forman una base de soluciones determine las funciones coeficientes P, Q, R en término de y_1, y_2, y_3 .

b) De los resultados de a) determine la ecuación diferencial que tiene como base de soluciones a $y_1(t) = \sin(t), y_2(t) = \cos(t), y_3(t) = e^t$

P3) (P1 C1 2000, Prof. Raúl Manasevich)

Considere la ecuación en m (*) :

$$m^2 + me^{\alpha t} + e^{2t} - 1 = 0, (*)$$

donde t y α son números reales.

a) Demuestre que para $\alpha \neq 2$ no existe m real que satisface (*) para todo t , pero que un tal m si existe $\alpha = 2$

b) Usando a) encuentre α tal que la ecuación diferencial:

$$y'' + e^{\alpha t} y' + (e^{2t} - 1)y = 0$$

tenga una solución explícita.

c) Complete entonces la base de soluciones y encuentre la solución general de la ecuación .

P4)

Sea y_1 a solución conocida de $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, (**)

En intervalo I, en el cual $a_2(x) \neq 0$, pruebe que toda solución y de (**) satisface la ecuación diferencial de primer orden

$$y_1 \frac{dy}{dx} - y'_1 y = f(x)$$

donde $f(x) = f(a_1(x), a_2(x))$. Usando lo anterior hallar base de solución para la ecuación

$$(1-x)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

sabiendo que $y(x) = -x$ es solución.

P5)

Suponga que $y_1(t)$ es solución de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Demuestre que $y_2(t) = y_1(t)v(t)$ es solución si

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ce^{-\int p(t)dt}}{y_1^2}$$

Hint: Evalúe y_2 en la ecuación.

Ecuaciones lineales homogéneas

P1) (C1 P4 2002, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva las ecuaciones diferenciales:

(a) $t^2 y'' - 7ty' + 16y = 0$

(b) $t^2 y'' - ty' + 2y = 0$

P2) (Tarea 1, 2002, Prof. Raúl Manasevich)

Encontrando primero la base de soluciones resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(1) $y'' = 10y' - 25y$

(2) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

(3) $y^{(iv)} - 2y'' + y = 0$

(4) $2y^{(v)} - 7y^{(iv)} + 12y''' + 8y'' = 0$

P3) (P1C1, 2003, Prof. Raúl Manasevich)

Sea Ψ una función continua definida en \mathbb{R} con Ψ' continua en \mathbb{R} .

Si $\Psi(0)=1$ y $\Psi'(0)=0$, se pide encontrar Ψ que satisface las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + M(1-R)\Psi &= 0 & \text{para } x \in (-\infty, 0]; \\ \frac{d^2\Psi}{dx^2} - MR\Psi &= 0 & \text{para } x \in (0, 1); \\ \frac{d^2\Psi}{dx^2} + M(1-R)\Psi &= 0 & \text{para } x \in [1, \infty);\end{aligned}$$

Donde M y R constantes positivas. $0 < R < 1$.

Haga un bosquejo de Ψ .

P4) (P3C1, 2003, Prof. Raúl Manasevich)

Un problema de ingeniería resulta ser modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$t^3 y''' + 3(a+1)t^2 y'' + (3a(a+1) - 3bc + 1)ty' + (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)y = 0,$$

donde a, b, c son parámetros constantes distintos y la variable t se interpreta como el tiempo.

a) Resuelva la ecuación en función de t, a, b y c tomando en cuenta que

(1) $m = -(a+b+c)$ es solución de la ecuación cúbica

$$m^3 + 3am^2 + 3(a^2 - bc)m + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0,$$

(2) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

b) Si $b = c = -\mu < 0$, determine la solución en términos de t, a y μ .

c) Experimentalmente se ha determinado que $2\mu - a > 0, a > 0$ y $b = c = -\mu < 0$, (como en la parte b)). Determine la solución $y(t)$ que satisface $y(1) = \frac{1}{a+\mu}, y'(1) = 0$ y que es tal que $y(t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito.

P5) (P5C1, 2003, Prof. Raúl Manasevich)

a) Sea $\lambda > 0$ en el problema

$$\begin{aligned}y^{(iv)} - \lambda y &= 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 &= y(1).\end{aligned}$$

Estudie si existen valores de λ para los cuales el problema tiene solución no trivial.

b) Resuelva el problema

$$y^{(vi)} + y = 0.$$

Método de Coeficientes Indeterminados

P1) (P1 Examen 2001, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva las ecuaciones:

a) $y'' + \omega^2 y = \sin \gamma t$.

b) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$

P2) (P4 C2 2001, Prof. Raúl Manasevich)

Determine la forma de una solución particular (en función de coeficientes indeterminados) para la ecuación

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t),$$

donde $a_n \neq 0, \dots, a_0$ son constantes, para los siguientes casos:

(a) $g(t) = e^t$, y se sabe que $m = 1$ es una raíz de multiplicidad, exactamente igual a 5, del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada.

(b) $g(t) = \cos t$, y se sabe que una raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada es $m = i$ con multiplicidad exactamente igual a 3.

P3) (P2 Examen 2000, Prof. Raúl Manasevich)

(i) $y'' - 2y' + y = e^t$.

(ii) $y''' - ky'' = e^{kt}$.

P4) (P2a Control 1 2000, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva la ecuación

$$y''' + ky'' = e^{-kt},$$

donde k es un número positivo.

P5) (C1 P4b) ??, Prof. Raúl Manasevich)

$$y''' - 6y'' + 9y' = te^{5t}.$$

P6) (P1 C2 1995, Prof. Raúl Manasevich)

Considere la ecuación diferencial de orden n

$$P(D)y = a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

donde $g(t) = a \cdot \cos(\beta \cdot t) + b \cdot \sin(\beta \cdot t)$, $\beta \neq 0$.

Encuentre la forma de la solución particular de la ecuación diferencial.

Sugerencia: considere primero el caso en que el anulador de g no es factor de $P(D)$.

P7) (P2 C2 1995, Prof. Raúl Manasevich)

Encuentre la solución general de:

(a) $y''' - 3y'' + 4y = te^{2t} - \sin(t)$

(b) $y^{iv} + 8y'' + 16y = \cos^2(t)$

P8) (P1 C2 2002, Prof. Raúl Manasevich)

Considere la ecuación diferencial de orden n siguiente

$$P(D)y = a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

donde $a_i, i = 0, \dots, n$ son constantes con $a_n \neq 0$. Suponga que

$$g(t) = t^{2ab-1} e^{abt} (a \cos bt + b \sin at)$$

donde a y b son enteros positivos.

Encuentre la forma de la solución particular considerando separadamente el caso en que el anulador de $g(t)$ no es un factor de $P(D)$ y el caso en que si lo es y con multiplicidades.

P9) (P2 C2 2002, Prof. R. Manasevich)

Use el método de los coeficientes indeterminados para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y^{iv} - y''' = x + e^x$

con $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

(b) $t^3 y''' + 3t^2 y'' + (1 - 3\alpha\beta)ty' + (\alpha^3 + \beta^3)y = t^{-(\alpha+\beta)} + \log t^{\alpha+\beta}$

sabiendo que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab)$

P10) (P5 C2 2002, Prof. R. Manasevich)

Considere el sistema de una masa oscilante en un medio viscoso sujeta a un resorte sobre la cual actúa una fuerza exterior periódica $F(t) = F_0 \sin(At)$ (A constante). De la formulación de la segunda ley de Newton resulta:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + F(t)$$

k es la constante del resorte, β constante de amortiguación positiva y m la masa.

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Encuentre $x(t)$ usando el método de coeficientes indeterminados considerando las condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 0$

Observación: Deberá analizar 3 casos: $\lambda^2 > \omega^2, \lambda^2 = \omega^2, \lambda^2 < \omega^2$

P11) (Tarea 1, 2003, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva a mano las siguientes ecuaciones diferenciales (pueden ocupar calculadora para los desarrollos numéricos):

i) $y^{(6)} + 72y'' - 1720y = 2\alpha \cosh(\sqrt{10}t)$

ii) $y''' - 15y'' - 33y' + 847y = \beta e^{11t}$

$$\alpha = \left[\frac{\sum \text{digitosmatrícula}}{10} \right], \beta = \left[\frac{\sum \text{digitos} - \text{rut}(\sin \text{verificador})}{30} \right]$$

(tomando la parte entera de los valores).

Ayuda: Deducción de la fórmula de Cardano para Ecuaciones Cúbicas.

La forma general de una ecuación cúbica es:

$$m^3 + Pm^2 + Qm + R = 0;$$

Pueden verificar que si m_1, m_2, m_3 son las soluciones de esta ecuación se cumplirán las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad m_1 + m_2 + m_3 &= -P \\ \text{(ii)} \quad m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3 &= Q \\ \text{(iii)} \quad m_1m_2m_3 &= -R \end{aligned}$$

El primer paso para resolver esta ecuación general será eliminar el segundo término de la ecuación (Pm^2) y reducir la ecuación a una de la forma:

$$x^3 + qx + r = 0;$$

Para esto se realizará un “cambio de variable” m a otra x , tal que al realizarlo convierta la suma de las “nuevas” tres raíces (el coeficiente que acompaña a x^2) en cero. Esto se hace incrementando a cada una de las raíces en $\frac{P}{3}$, y por lo tanto bastará con aplicar el cambio de variable

$$m = x - \frac{P}{3}.$$

- Resolver la ecuación $x^3 + qx + r = 0$.

Pongamos $x = y + z$; entonces

$$x^3 = y^3 + z^3 + 3yz(y + z) = y^3 + z^3 + 3yzx,$$

y la ecuación dada se convierte en

$$y^3 + z^3 + (3yz + q)x + r = 0.$$

Esta ecuación queda satisfecha para los valores que cumplan las condiciones

$$\begin{aligned} y^3 + z^3 &= -r \\ 3yz &= -q \end{aligned}$$

o sea:

$$\begin{aligned} y^3 + z^3 &= -r \\ y^3 z^3 &= \frac{-q^3}{27} \end{aligned}$$

Luego, y^3 y z^3 son las raíces de la ecuación cuadrática (recuerde las propiedades de las raíces de las ecuaciones de segundo)

$$t^2 + rt - \frac{q^3}{27} = 0,$$

llamada *resolvente* de la ecuación dada. Resultan así los valores

$$\begin{aligned} y^3 &= -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \\ z^3 &= -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \end{aligned}$$

El valor de x se obtiene de la relación $x = y + z$, luego,

$$x = \left[-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}}$$

La solución anterior se conoce generalmente como *fórmula de Cardano*, ya que fue publicada por primera vez por él en la obra *Ars Magna*, en 1545.

Referencia: Álgebra Superior, Hall y Knight.

Las otras dos soluciones que faltan se pueden encontrar dividiendo el polinomio cúbico por el factor $(x-a)$ donde a es una raíz y resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta.

P12) (P1, C2 2003, Prof. Raúl Manasevich)

a) Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = \sin^2 x.$$

b) Encuentre la forma de la solución particular para la ecuación

$$(D - I)^3(D^2 - 4I)y = xe^x + e^{2x} + e^{-2x}.$$

P13) (P4, C2 2003, Prof. Raúl Manasevich)

Usando el método de coeficientes indeterminados resuelva la ecuación

$$y^{(v)} + 8a^3 y'' = a + e^{at} \cos(at).$$

P14) (P1, Examen 2003, Prof. Raúl Manasevich)

Encontrando primero la base de soluciones resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

i) $\sin^2(x)y'' - 3\sin(x)\cos(x)y' + (1 + 2\cos^2(x))y = 3\cos(x)$

ii) $x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2$

P15) (P1, C2 2004, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$(1 + t^2)y'' + 4ty' + (2 + \omega(1 + t^2))y = t \cos(\sqrt{\omega} \cdot t)$$

Indicación: Aplique el cambio de variable $z(t) = (1 + h(t))y(t)$ para algún $h(t)$.

P16) (P2a, C2 2004, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = \left(\frac{1 + \ln(t) + 2(\ln(t))^3}{1 + 2(\ln(t))^2} \right) \cdot t^2$$

P17) (P1c Examen 2004, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x}$$

Sugerencia: Haga el cambio de variable $z=xy$.

P18) (P1 C1 2005, Prof. Raúl Manasevich)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) \quad y^{(iv)} - y = e^t + \cos(t)$$

$$(b) \quad y'' - 4y' + 4y = (e^{2t} + 1)(\cos(t) + 1)$$

P19) (P2b Examen 2005, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$xy'' - 2(1 + 6x^3)y' + 36x^5y = 9x^8 \sin(3x^3)$$

Sugerencia: Haga $t = x^m$ con m adecuado.

P20) (P3a C1 2006, Prof. Raúl Manasevich)

$$2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$$

P21) (P1c Exámen 2006, Prof. Raúl Manasevich)

$$y'' + y = 4 \cos x - \sin x$$

Método de Variación de Parámetros.**P1) (P3 C2 1995, Prof. Raúl Manasevich)**

Considere la ecuación diferencial $t^2 y'' + ty' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = t^{\frac{3}{2}}, t > 0$.

- Demuestre que $y_1(t) = t^{-\frac{1}{2}} \cos t$ es una solución de la ecuación homogénea correspondiente.
- Encuentre otra solución l.i. con y_1 .
- Encuentre la solución general.

P2) (Tarea 2 2001, Prof. Raúl Manasevich)

Usando el método de variación de parámetros resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a) \quad y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^x}$$

- b) $4y'' - 4y' + y = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}$ donde $x \in [-1, 1]$
- c) $y''' + 4y'' = \sec(2x)$ donde $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$
- d) $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$ con la condición inicial $y(0)=1, y'(0)=0$.

P3) (P1 C2 2001, Prof. Raúl Manasevich)

a) Considere la ecuación diferencial:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \quad (1)$$

donde $p(t), q(t)$ y $f(t)$ son funciones definidas en \mathbb{R} continuas. Suponiendo que $y_1(t), y_2(t)$ son dos soluciones l.i. de la ecuación homogénea asociada demuestre que la solución general de (1) se puede escribir en la forma

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \int_0^t G(t, s) f(s) ds,$$

donde se pide determinar esta función G .

(b) Evalúe a partir de (a) la solución general de la ecuación $y'' + k^2 y = f(t)$.

P4) (P2 Control 2 2001, Prof. Raúl Manasevich)

a) Considere la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, x > 0.$$

Encuentre una base de soluciones de esta ecuación. Sugerencia. Considere funciones de la forma $h(x)\cos(Bx)$, y , o $g(x)\sin(Bx)$, para funciones h y g convenientes.

b) Encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{\frac{5}{2}}, x > 0.$$

P5) (P5 Control 1 2002, Prof. Raúl Manasevich)

Encuentre la solución general del problema

$$y''' + y' = \tan t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

P6) (P2 Control 2 2003, Prof. Raúl Manasevich)

Considere la ecuación diferencial

$$xy'' + (4x^2 - 1)y' + 4x^3 y = x^3 e^{x-x^2}, x > 0.$$

i) Encuentre la solución de la ecuación homogénea correspondiente.
Hint. Reduzca esta ecuación a una de coeficientes constantes mediante un cambio de la forma $t = x^\alpha$, para un cierto α .

ii) Encuentre la solución de la ecuación general por medio de variación de parámetros.

P7)

Encuentre la solución particular de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + a^2 y = F(x)$$

P8) (P2b, C2 2004, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t} y' - \frac{1}{1-t} y = 1-t$$

P9) (P2 C1 2005, Prof. Raúl Manasevich)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) \quad (t^2 - 1)y'' - 2ty' + 2y = t^2 - 1$$

$$(b) \quad ty'' + (2t + 3)y' + (t + 3)y = ae^{-t}, \quad t > 0$$

P10) (P2a Exámen 2005, Prof. Raúl Manasevich)

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$4x^2 y'' + 8x^3 y' + y = \tan \frac{1}{2x}$$

Sugerencia: Haga $x = t^m$ con m adecuado

P11) (P2b C1 2006, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva la siguiente EDO:

$$t^2 x'' + tx' + x = t$$

P12) (P3b C1 2006, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva la siguiente EDO:

$$4y'' - 4y' - y = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1, 1)$$