



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROFESOR: Raúl Manasevich
AUXILIAR: Alfredo Núñez
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otoño 2007

UNIDAD N°1

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Variables Separables

P1)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dy(x)}{dx} - y(x) = 0$

b) $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$

c) $\frac{dx}{dt} = (2 - x)(1 - x)$

d) $\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x)$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

f) $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$

g) $\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$

h) $xy^4 dx + (y^2 + 2)e^{-3x} dy = 0$

i) $2t^3 y^2 dt + t^3 y^2 dy = 0$

j) $\frac{dx}{dy} = 4(x^2 + 1), \quad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

k) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

l) $\frac{dy}{dx} = \sin(x)(\cos(2y) - \cos^2(y))$

m) $2 \frac{dx}{dt} = x^3 \cos(t)$

n) $y \frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2y + 1}, \quad y(0) = -1$

ñ) $\frac{dy}{dt} = \frac{1 + \operatorname{sen}(y) - \cos(y)}{9t^3 + 1}$

o) $\frac{dy}{dt} = \frac{t^5 y^4 \cdot \sqrt{1 - t^3}}{\sqrt{y - y^2}}$

p) $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + y) \cdot \operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{y}}$

q) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cosec}(x) \cdot \sqrt{a^2 - y^2}$

r) $\frac{dx}{dy} = \frac{4(x^2 - a^2)}{\sqrt{y^2 + a^2}}$

s) $2 \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{\sqrt{x^2 - 2ax}}$

t) $y \frac{dy}{dt} = a^{2t}$

u) $\frac{dy}{dt} = \frac{\operatorname{arctg}(t)}{y^2 \operatorname{senh}(y)}$

P2) (P1 C1 2001, Prof. R. Manasevich)

Resolver

$$\text{a)} \quad y' = \frac{y}{x(\log(y) - \log(x) + 1)}, \quad y(1) = e$$

$$\text{b)} \quad y' = 1 + e^{y-x+5}$$

$$\text{c)} \quad y'' = \frac{\cos(t)}{y'e^{(y')^2} + 1}$$

además en este caso a partir de la expresión encontrada demuestre que se puede resolver para y' en forma única.

P3) (P4 C1 2001, Prof. R. Manasevich)

La ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b \log(P))$$

se utiliza en el pronóstico de crecimiento de poblaciones. En esta ecuación $a > 0$ y b son constantes.

- Encuentre la solución de esta ecuación en términos de a , b , $P_0 = P(0) > 0$ y t .
- Describa el comportamiento de $P(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, (considere los casos $b > 0$, $b < 0$)

P4)

Un esquiador de masa M baja por una ladera inclinada con un ángulo α respecto a la horizontal, sometiendo además de la fuerza de roce cinética con la nieve con constante μ_k una fuerza de roce viscosa de la forma $-2\beta m v$

La ecuación de movimiento del esquiador es:

$$mg \sin \alpha - 2\beta m \frac{dx}{dt} - \mu_k mg \cos \alpha = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Si $\tan(\alpha) > \mu_k$:

- Determine la rapidez del esquiador en función del tiempo $\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)$
- Determine la rapidez límite, es decir cuando $t \rightarrow \infty$.
- Determine la posición en función del tiempo $(x(t))$

P5)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\text{a)} \quad \frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$$

$$\text{b)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x - y}{x + y}$$

c) $xyy' = 3y^2 + x^2, \quad y(-1) = 2$

d) $xy^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - x^3$

e) $\frac{dy}{dx} = (-5x + y)^2 - 4$

P6)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$y'(t) = t \cdot y^{1/2}, \quad y(0) = 0$$

P7) (P4i Examen 2001, Prof. R. Manasevich)

Considere la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x - y)$$

Encuentre la solución general y el dominio de definición de esta solución. Encuentre una solución de esta ecuación que satisfaga $y(\pi/2) = 0$

P8) (P3 C1 2000, Prof. R. Manasevich)

Encuentre la solución (o soluciones) para el problema con condición inicial:

$$y'' = 3y^5 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Es la solución a este problema única? Encuentre el intervalo maximal donde está definida la solución (o las soluciones) y dibuje estas soluciones.

P9) (P2i Examen 2002, Prof. R. Manasevich)

Considere la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$$

Encuentre la solución que satisface $y(0) = 0$, y dé el dominio de definición de esta solución.

P10) (P2a Control 1 2003, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y^2 + \beta ty}{t^2 + \alpha ty}.$$

P11) (P4 Control 1 2003, Prof. R. Manasevich)

La velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del aire, es decir

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0), \quad K > 0.$$

- a) Determine $T(t)$.
 b) Si $T_0=20$ grados Celsius y el cuerpo se enfría desde 100 a 60 grados Celsius en veinte minutos se pide calcular en cuanto tiempo la temperatura del cuerpo descenderá hasta 30 grados Celsius.
 c) ¿Cual es la temperatura limite ($t \rightarrow \infty$) del cuerpo?

P12) (Tarea 1 2004, Prof. R. Manasevich)

Problema 1.- En un acelerador de partículas lineal, un electrón que parte con velocidad inicial v_0 en $t=0$ es acelerado por un campo eléctrico constante de magnitud E . Determinar la velocidad final $v(t)$ al cabo de t segundos.

Hint: Hay que tener en cuenta el efecto relativista que hace que la masa del electrón varíe con su velocidad de acuerdo con la expresión

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde m_0 es la masa en reposo del electrón constante. Considerar la segunda ley de Newton en la forma

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

donde $F = e \cdot E$ es la fuerza aplicada al electrón debido al campo eléctrico (constante).

Problema 3.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales e indique el dominio de la solución:

a) $y' = \frac{y \cdot \sen(x)}{1 + \cos(x)}, y(0) = 1$

b) $2 \cdot e^{-x} \cdot y \cdot y' = x \cdot (\sen(x) + \cos(x)) + \sen(x); y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{4}}$

c) $y' = y \cdot \sec(x); y(0) = 1.$

P13) (P4a C1 2004, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{y^2 y'}{x^4} + e^{x^5 + y^3} = 0$$

Encuentre además la solución $y(t)$ que tiende a cero cuando x tiende a $-\infty$.

P14) (P1a Examen 2004, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$x \cdot y' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

P15) (P4 C1 2005, Prof. R. Manasevich)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' = 6e^{2t-y}$, $y(0) = 0$

(b) $2t^{\frac{1}{2}}y' = \cos^2 y$, $y(4) = \frac{\pi}{4}$

P16) (P1c Exámen 2006, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente EDO:

$$\frac{y}{x^2} y' + e^{2x^2+y^2} = 0. \text{ (2.0 puntos)}$$

Problemas**P1) (P2 C1 2002, Prof. R. Manasevich)**

Considere la ecuación diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

donde $p, q : I \rightarrow \mathfrak{R}$ son dos funciones continuas que se pide determinar bajo la condición de que

$$y_1(t) = \sin t^2, \quad y_2(t) = \cos t^2$$

formen una base de soluciones de esta ecuación.

Determine claramente los intervalos reales I donde este problema admite solución.

P2) (P3 C1 2002, Prof. R. Manasevich)

Considere la ecuación de Clairaut

$$y = ty' - \frac{1}{4}(y')^2.$$

Demuestre que

$$y(t) = Ct - \frac{1}{4}C^2$$

es una solución uniparamétrica de esta ecuación (2 puntos).

Encuentre cual de las siguientes funciones: $y(t) = t^2$, $y(t) = t^3$, $y(t) = e^t$, es una solución de la ecuación diferencial y haga un gráfico donde incluya esta última solución así como la familia uniparamétrica de soluciones, indicando la relación geométrica entre estas soluciones (4 puntos).

Ecuaciones de primer orden lineales

P1)

Resuelva las siguientes Ecuaciones Lineales:

- a) $y' + 4y = e^{-t}$, $y(0) = \frac{4}{3}$
- b) $y' \operatorname{sen}(x) = x - y \cos(x)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- c) $\frac{dy}{dt} + y \cot(t) = 2 \cos(t)$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$
- d) $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$
- e) $x \frac{dy}{dx} + y = 2x$, $y(1) = 0$
- f) $\frac{dr}{d\theta} + r \sec \theta = \cos \theta$

P2) (P2 C1 2001. Prof. R. Manasevich)

Considere el problema con condición inicial:

$$(1 + x^2)y' + 2xy = f(x), \quad y(0) = 0$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1) \\ -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Encuentre una solución continua, (no de clase C^1) de este problema.

Evalúe $y'(1_+)$, $y'(1_-)$ y demuestre que $y'(1_+) - y'(1_-) = -1$.

P3)

Se tiene un sistema dinámico de primer orden de tiempo continuo, definido por la ecuación diferencial

$$\dot{Y}(t) + 4Y(t) = 2U(t), \quad Y(0) = 1.$$

Suponga que la entrada $U(t)$ es un proceso estocástico de valor medio $\eta_U = 2t$ y función de auto correlación $R_{UU}(t_1, t_2) = t_1 t_2$. Se pide analizar el proceso estocástico de salida $Y(t)$, encontrando su valor medio $\eta_Y(t)$ y auto correlación $R_{YY}(t_1, t_2)$.

Para esto tendrá que resolver las ecuaciones:

- 1) $\dot{\eta}_Y + 4\eta_Y = 4t$ para encontrar el valor medio $\eta_Y(t)$

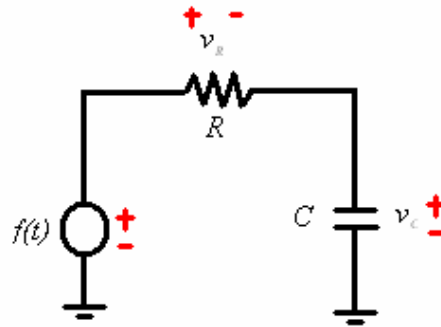
2) $\frac{\partial R_{UY}(t_1, t_2)}{\partial t_2} + 4R_{UY}(t_1, t_2) = t_1 t_2$ para encontrar $R_{UY}(t_1, t_2)$ necesario para calcular

la auto correlación que se obtiene a partir de la ecuación:

$$\frac{\partial R_{YY}(t_1, t_2)}{\partial t_1} + 4R_{YY}(t_1, t_2) = R_{UY}(t_1, t_2).$$

P4) (P1 C1 2004. Prof. R. Manasevich)

En un circuito RC (ver figura) se ubica una fuente de voltaje $f(t)$ que es tal que si el voltaje en el condensador v_c supera o es igual a $v_0/2$ tomará el valor $f(t) = -v_0$. Si v_c es menor o igual a $-v_0/2$ entonces $f(t)$ tomará el valor $f(t) = v_0$.



El voltaje en el condensador v_c es una función continua en el tiempo y satisface la ecuación diferencial:

$$RC \cdot \frac{dv_c}{dt} + v_c = f(t),$$

$$f(0) = v_0, v_c(0) = 0.$$

- Grafique la evolución en el tiempo del voltaje en el condensador, indicando intersecciones con el eje de las abscisas y puntos relevantes, desde $t=0$ hasta $t=RC(\ln 2 + 3\ln 3)$.
- Indique el período del voltaje en el condensador y grafique el voltaje en la resistencia.

Datos: (Ley de Kirchhoff para voltaje y Ley de Ohm)

$$v_c(t) + v_R(t) = f(t)$$

$$v_R(t) = i(t)R = RC \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

P5) (P1 C1 2006. Prof. R. Manasevich)

(a) (3.0 puntos) Considere la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$y' + a(t)y = b(t)u(t)$$

(i) Sabiendo que en la ecuación se cumple lo siguiente:

-cuando $u(t) = 0$, $y(0) = 1$ la solución es $y(t) = e^{-t}$

-cuando $u(t) = 1$, $y(0) = 0$ la solución es $y(t) = -e^{-t} + 1$

se pide encontrar las funciones $a(t)$ y $b(t)$.

(ii) A partir de (i), determine la solución $y(t)$ de la ecuación cuando $u(t) = \text{sen}(t)$,
 $y(0) = 0$

(b) (3.0 puntos) Resuelva la ecuación diferencial ordinaria:

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x$$

$$y(0) = -1$$

Ecuaciones de Bernoulli y de Ricatti.**P1)**

Resuelva las siguientes Ecuaciones:

a) $x \frac{dy}{dx} + y = x^2 y^2$

b) $\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$

c) $y' + xy^2 - (2x^2 + 1)y + x^2 + x - 1 = 0$

d) $y' = -ty + ty^2$

e) $y' + (\cot(t))y + \frac{1}{\text{sen}(t)}y^2 = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

P2)

a) Muestre a que tipo de ecuación se reduce la ecuación de Ricatti usando la siguiente sustitución.

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$$

b) Observe que $y_1(x) = \frac{2}{x}$ es solución de

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$$

Usando lo realizado en la parte a) encuentre la solución de esta ecuación tal que $y(1) = 3$

P3) (P1 Control 1 2002, Prof. R. Manasevich)

Mediante sustituciones adecuadas resuelva la ecuación diferencial no lineal

$$y' - 4y \log y + 2ty(\log y)^3 = 0,$$

y encuentre la solución que satisface $y(0) = e^{-\frac{1}{4}}$. Demuestre que el dominio de definición de esta solución incluye el intervalo $[0, \infty)$.

Sugerencia. Transforme primero la ecuación en otra no lineal pero conocida.

P4) (P1 Examen 2002, Prof. R. Manasevich)

Resuelva las ecuaciones:

$$\text{i)} \quad y' + \cot x - \frac{1}{\sin x} y^2 = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ii)} \quad y' - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$$

P5) (P2b Control 1 2003, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y^2}{(m+n)^2} - \frac{4mn}{(m+n)^2}y - (m-n)^2.$$

P6) (Tarea 1 2004, Prof. R. Manasevich)

Problema 2.- Considere la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dt} = (1-y)(x(t) + k \cdot y)$

donde $x(t)$ es una función cualquiera y k es una constante.

a) Hallar la solución del problema.

b) Calcular la solución en el caso de que $x(t) = k \cdot t$, con k constante

P7) (P4b C1 2004, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y}{x} + x^4 y^2 - x^6$$

P8) (P1b Examen 2005, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' - y^2 \arctan y = \arctan y + [3(\arctan y)^2 - 2](1 + y^2)$$

P9) (P2a C1 2006, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \tan(y) \cdot \text{sen}(y) + 3 \tan(y) + 2 \sec(y)$$

Sugerencia: Use un cambio de variable adecuado para convertir la ecuación en Ricatti a coeficientes constantes.

Ecuaciones exactas y factores integrantes.

P1) Verificar si las siguientes Ecuaciones Diferenciales son exactas o no, en caso de serlo resuelva:

a) $(x^2 + \frac{y}{x})dx + \ln(x + 2y)dy = 0$

b) $(ye^{-x} - \text{sen}(x))dx - (e^{-x} + 2y)dy = 0$

c) $2y(y-1)dx + x(2y-1)dy = 0$

d) $(2xy^2 - y\text{sen}(x) + 2x - 1)dx + (2x^2y + \cos(x) + \frac{1}{y})dy = 0$

e) $(1 - y^2)dx + (1 - x^2)dy = 0$

Respuestas:

a) No es exacta.

b) $\cos x - ye^{-x} - y^2 = C$.

c) No es exacta.

d) $x^2y^2 + y\cos(x) + x^2 - x + \ln(y) + C$

e) No es exacta

P2)

Determine k tal que la ecuación sea exacta:

$$((2x - y\text{sen}(xy)) + ky^4)dx - (20xy^3 + x\text{sen}(xy))dy = 0$$

R: k = -5

P3)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$(\cos(x)\text{sen}(x) - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$$

R: $\frac{y^2}{2}(1 - x^2) + \frac{\text{sen}^2(x)}{2} = C$

P4)

Resuelva como ecuación exacta y como ecuación homogénea:

$$\frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3}dx + \frac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y}dy = 0 \quad \mathbf{R:} \quad x^2y^2(4y^2 - x^2) = c$$

P5)

Hallar el valor de n para el cual cada una de las ecuaciones siguientes es exacta y resolverlas para ese valor de n:

a) $(xy^2 + nx^2y)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0; \quad \mathbf{R:} \quad n = 3, (xy)^2 + 2x^3y = c;$

b) $(x + ye^{2xy})dx + nxe^{2xy}dy = 0; \quad \mathbf{R:} \quad n = 1, x^2 + e^{2xy} = c;$

P6)

Resolver cada una de estas ecuaciones hallando un factor integrante:

- a) $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0;$
- b) $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0;$
- c) $xdy + ydx + 3x^3y^4dy = 0;$
- d) $e^x dx + (e^x \cot g(y) + 2y \operatorname{cosec}(y))dy = 0;$
- e) $(x + 2)\operatorname{sen}(y)dx + x \cos(y)dy = 0;$
- f) $(x^3 + xy^3)dx + 3y^2dy = 0;$

Respuestas:

- a) $\mu = \frac{1}{y^4}, x^2 - y^2 = cy^3;$
- b) $\mu = \frac{1}{x}, 2xy - \log x^2 - y^2 = c;$
- c) $\mu = \frac{1}{(xy)^3}, 3x^2y^4 = 1 + cx^2y^2;$
- d) $\mu = \operatorname{sen} y, e^x \operatorname{sen}(y) + y^2 = c;$
- e) $\mu = xe^x, x^2 e^x \operatorname{sen}(y) = c;$
- f) $\mu = e^{\frac{x^2}{2}}, e^{\frac{x^2}{2}} (y^3 + x^2 - 2) = c;$

P7)

Considere la ecuación diferencial no exacta $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, donde M y N

son de clase C^1 . Demuestre que si $\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{(Ny - Mx)}$, es una función $g(z)$ del producto $z=xy$,

entonces la ecuación diferencial tiene un factor integrante de la forma $u=u(z)$ y encuéntralo.

P8) (P2 C1 1995, Prof. R. Manasevich)

Considere la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, donde M, N son de clase C^1 y suponga que existen dos funciones $f, h \in C^1$ tal que:

$$f(x)M(x, y) + h(y)N(x, y) = 0.$$

Encuentre la solución de la ecuación diferencial en $D \subset \mathbb{R}^2$, donde $f(x) \neq 0$ y $h(y) \neq 0$.

P9) (P3 Control 2 2002, Prof. R. Manasevich)

- (a) $\left(1 + \log x + \frac{y}{x}\right)dx - (1 - \log x)dy = 0;$
- (b) $\left(\frac{3y^2 - x^2}{y^5}\right)y' + \frac{x}{2y^4} = 1, y(1) = 1$
- (c) $(4y + 9x^2)dy + 6xydx = 0;$

P10) (P4 Control 2 2002, Prof. R. Manasevich)

a) Considere la ecuación diferencial no exacta: $M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0$, donde M, N

son de clase C^1 . Demuestre que si $\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)}{y^{m-1}t^{n-1}(nyN - mtM)}$, es una función de $z=t^n y^m$,

entonces la ecuación diferencial tiene un factor integrante de la forma $\mu = \mu(z)$.

(b) Si ahora $M(t, y) = yf(ty)$ y $N(t, y) = tg(ty)$, para ciertas funciones f y g de clase C^1 ,

demuestre que $\mu(t, y) = \frac{1}{tM - yN}$, es un factor integrante de la ecuación.

P11) (Tarea 3, 2002, Prof. R. Manasevich)

a) $\left(\frac{3y^2 - x^2}{y^5}\right)dy + \frac{x}{2y^4}dx = 0$

b) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(ye^y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

c) $(-xy \sin(y) + 2x \cos(y))dy + 2y \cos(y)dx = 0$

d) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(ye^y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

e) Determine N(x,y) tal que la siguiente ecuación sea exacta y resuelva

$$\left(y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{x^2 + y}\right)dx + N(x, y)dy = 0.$$

P12) (P4 Control 3 2003, Prof. R. Manasevich)

i) $\sin(x)\cosh(y)dx - \cos(x)\sinh(y)dy = 0, y(0) = 0$

ii) $(x + 3x^3 \sin(y))dx + x^4 \cos(y)dy = 0$

P13) (P5 Control 3 2003, Prof. R. Manasevich)

$$(5x^2y + 6x^3y^2 + 4xy^2)dx + (2x^3 + 3x^4y + 3x^2y)dy = 0.$$

i) Demuestre que esta ecuación admite un factor integrante de la forma $\mu(x^n y^m)$

ii) Encuentre el factor integrante correspondiente y resuelva la ecuación.

P14) (P2 Examen 2004, Prof. R. Manasevich)

i) $(2xy^2 - y \cdot \sin x + 2x - 1)dx + \left(2x^2y + \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0, y \neq 0.$

ii) $(x + y)dx + x \log x \cdot dy = 0, x > 0.$

P15) (P1 C2 2005, Prof. R. Manasevich)

Sea la siguiente ecuación diferencial no exacta:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Donde las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ satisfacen las siguientes propiedades

$$M(x, y) = y \cdot f(xy), N(x, y) = x \cdot g(xy)$$

con $f(xy)$ y $g(xy)$ funciones conocidas.

(a) Encontrar un factor integrante para la ecuación.

(b) Resuelva la siguiente ecuación diferencial: $xdy + ydx + 3x^3y^2dy = 0$

P16) (P1a Exámen 2005, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$xdy + (2y - \sin x)dx = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi^2$$

P17) (P3 C2 2006, Prof. R. Manasevich)

Considere la ecuación no exacta:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Suponga que se cumple que:

$$g(z) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{\beta y^{\beta-1} \cdot M(x, y) - \alpha x^{\alpha-1} \cdot N(x, y)}$$

Para cierta función z que dependa de x e y .

(a) Encuentre un factor integrante para la ecuación. Indicación: encuentre z .

(b) Ocupando la parte anterior, encuentre un factor integrante para la ecuación:

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 - 2xy - x^2)dy = 0$$

y a continuación resuelva la ecuación.

P18) (P4b C2 2006, Prof. R. Manasevich)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(i) \quad y' = \frac{-3x^2 - 2y \sin 2x}{2 \sin^2 x + 6y^2}$$

$$(ii) \quad (2y - 6x)dx + \left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)dy = 0$$