



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROFESOR: Raúl Manasevich
AUXILIAR: Alfredo Núñez
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otoño 2007

UNIDAD N°3

TRANSFORMADA DE LAPLACE Y APLICACIONES

P1) (Tarea 6 2001, Prof. R. Manasevich)

i) Encuentre las transformadas inversas de Laplace en los siguientes casos:

a) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + s - 20}\right\}$ b) $L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2(s^2+1)}\right\}$

ii) Encuentre las siguientes transformadas de Laplace:

a) $L\{e^t \cos^2(3t)\}$ b) $L\{t^2 \cos^2(t)\}$

P2) (P1 C3 2002, Prof. R. Manasevich)

Encuentre las siguientes transformadas de Laplace:

a) $L\{e^{2t}(t-1)^2\}$ b) $L\{e^t U(t-5)\}$ c) $L\{te^{-3t} \cos(3t)\}$

((ii) U es la función Escalón Unitario)

P3) (P2 C3, Prof. R. Manasevich)

Encuentre la transformada inversa de las siguientes funciones:

a) $L^{-1}\left\{\frac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\}$ b) $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right\}$ c) $L^{-1}\left\{\frac{sF(s)}{s^2+4}\right\}$

((iii) suponga que $f(t)=L^{-1}(F(s))$.)

P4) (P3 Examen 2002, Prof. R. Manasevich)

Usando transformada de Laplace resuelva los siguientes problemas.

(i) Encuentre la solución de :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \omega_0 \left[1 - U\left(x - \frac{L}{2}\right) \right]$$

que satisface $y(0) = y'(0) = 0$, $y(L) = y''(L) = 0$.Aquí E, I, w_0 son constantes positivas y $L > 0$

(ii) Encuentre la solución de :

$$y'' - 7y' + 6y = e^t + \delta(t - 10\pi) + \delta(t - 20\pi) ,$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

P5) (P4 Examen 2002, Prof. R. Manasevich)

(i) Usando transformada de Laplace encuentre la solución de la ecuación integral:

$$y(t) = \cos t + \int_0^t e^{-s} y(t-s) ds$$

(ii) Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua a trozos y de orden exponencial. Demuestre que su transformada de Laplace $F(s)$ satisface $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$

(iii) Calcule la transformada de Laplace de la onda cuadrada

$$w(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2n \leq t < 2n+1 \\ -1 & \text{si } 2n+1 \leq t < 2n+2 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

P6) (Ex 2000, Prof. R. Manasevich)

(ii) $\frac{dx}{dt} = 4x - 2y + 2U(t-1)$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - y + U(t-1), \quad x(0) = 0, y(0) = 1/2$$

P7)

Resuelva por medio de la transformada de Laplace el siguiente problema con condición inicial:

$$y'' + 4y' + 3y = 1 - U(t-2) - U(t-4) + U(t-6)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

P8) (Ex 2001, Prof. R. Manasevich)

Considere la función $f(t)$ definida en los reales positivos incluyendo el cero definida por:

$$f(t) = n \quad \text{si} \quad n-1 < t \leq n \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{función cajón o parte entera})$$

i) Encuentre una expresión para esta función como una serie infinita y encuentre entonces su transformada de Laplace. Si es necesario suponga que la transformada de la serie es igual a la serie de las transformadas.

ii) Use transformada de Laplace para resolver el problema con condición inicial siguiente:

$$x'' + k^2 x = f(t), \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$$

donde $f(t)$ es la función de la parte (i). Encuentre la solución en forma explícita.

Sugerencia: Use convenientemente el teorema de convolución.

P9) (P3C2 2003, Prof. R. Manasevich)

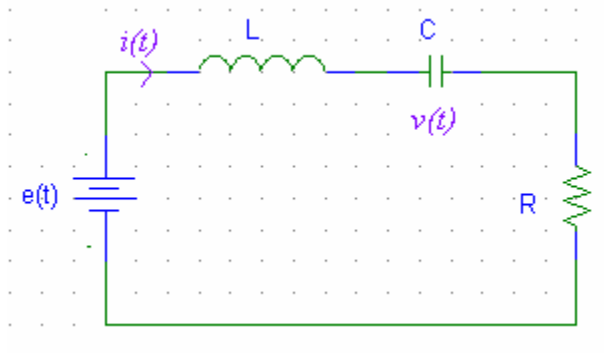
(i) Dibuje la función $e(t)$ dada por:

$$e(t) = t - j, \text{ para } j \leq t < j+1, \quad j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Demuestre que su transformada de Laplace es dada por:

$$\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{e^{-s} - 1} \right).$$

(ii) Considere ahora el circuito eléctrico RLC en serie



El voltaje $v(t)$ en el condensador C satisface la ecuación diferencial

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{RC}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = \frac{e(t)}{L}.$$

Calcule el voltaje $v(t)$ por el condensador y la corriente $i(t) = C \frac{dv}{dt}(t)$, si la entrada de voltaje $e(t)$ está dado por la función de la parte (i), y las condiciones iniciales son $v(0) = v_0, i(0) = i_0$.

Las constantes quedan dadas por $LC=1, RC=2$.

P10) (P5C2 2003, Prof. R. Manasevich)

(i) Considere el problema con valores iniciales

$$x'' + 2x' + x = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\pi}(t), \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Determine la solución usando transformada de Laplace.

Para esto suponga que la transformada de la serie es la serie de las transformadas y similarmente para la transformada inversa.

(ii) Si $t \in [j\pi, (j+1)\pi[$ demuestre que $x(t) = e^{-t}(t \cdot \alpha_j + \beta_j)$, para ciertas constantes α_j y β_j .

P11) (P2 Ex 2003, Prof. R. Manasevich)

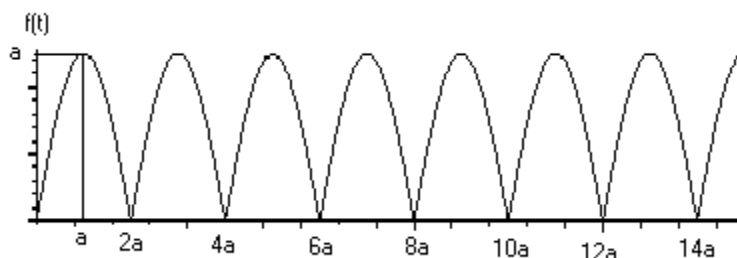
i) Resuelva la ecuación:

$$x' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} U(t-a) \\ \delta(t-b) \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}^+ ;$$

$$x(0) = 0$$

ii) Encuentre la transformada de Laplace de la onda periódica de la figura, que en su primer período cumple con:

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t), \quad t \in (0, 2a)$$

con A y ω valores adecuados.

iii) Resuelva la ecuación:

$$y'' + 2y' + y = f(t)$$

donde $f(t)$ es la función de la parte ii)**P12) (Tarea 4 2004, Prof. R. Manasevich)**

a) (1 punto) Calcule las transformadas de Laplace de las siguientes funciones en el tiempo.

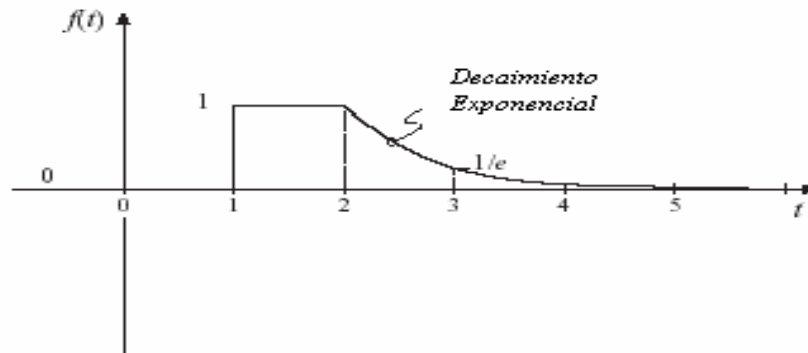
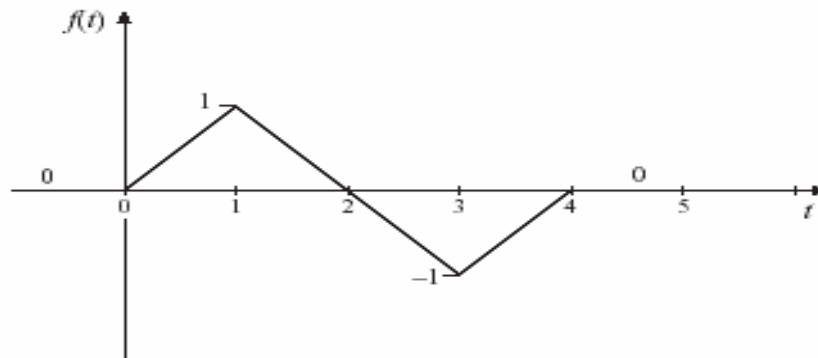
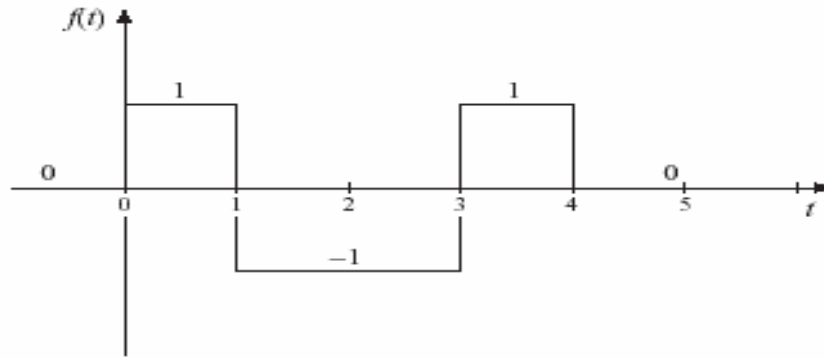
$$\text{i)} \quad V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) U(t) \quad \text{ii)} \quad V_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) U(t)$$

$$\text{iii)} \quad \left(1 - \frac{\varpi}{\varpi - \vartheta} e^{-\vartheta t} - \frac{\vartheta}{\vartheta - \varpi} e^{-\varpi t} \right) U(t)$$

(U(t) es la función Escalón Unitario)

b) (2 puntos) Para cada forma de onda ilustrada a continuación:

- i) Exprésela en función del tiempo, usando funciones escalones unitarios, funciones exponenciales, sinusoidales o polinomios según sea apropiado
 - ii) Encuentre su transformada de Laplace usando solo propiedades y transformadas de funciones conocidas.
 - iii) Encuentre la transformada de Laplace usando integración.
- ¿Son los resultados de la parte ii) equivalentes a los de la parte iii)?

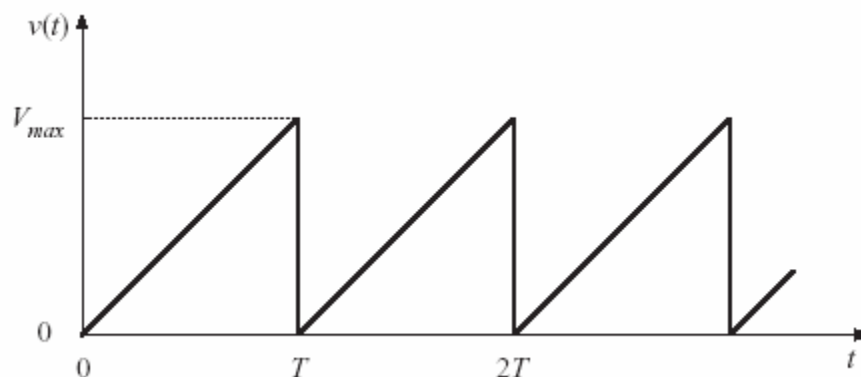


c) (1 punto) Dada la siguiente ecuación diferencial, se pide encontrar $V(s)$ y luego aplicando la transformada inversa, calcular $v(t)$.

$$LC \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = V_M \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

$$v(0) = V_0; \frac{dv(0)}{dt} = V_1$$

d) (1 punto) Encuentre la transformada de Laplace de la función diente de sierra:



e) (1 punto) Usando fracciones parciales, encuentre la transformada inversa de las siguientes funciones:

a) $F(s) = \frac{10s + 2}{s^2 + 6s + 8}$ b) $F(s) = \frac{s^2 + 6s + 10}{s^2 + 5s + 4}$ c) $F(s) = \frac{5s^2 + 6s + 1}{(s^2 + 2s + 2)(s + 3)^2}$

d) $F(s) = \frac{16}{s(s^2 + 64)(s + 4)}$ e) $V(s) = \frac{V_M}{s^2 RC(1 + sRC)}$

P13) (P3 Control 2 2004, Prof. R. Manasevich)

Sea $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $(0, \infty)$ y de orden exponencial y tal que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = +\infty$.

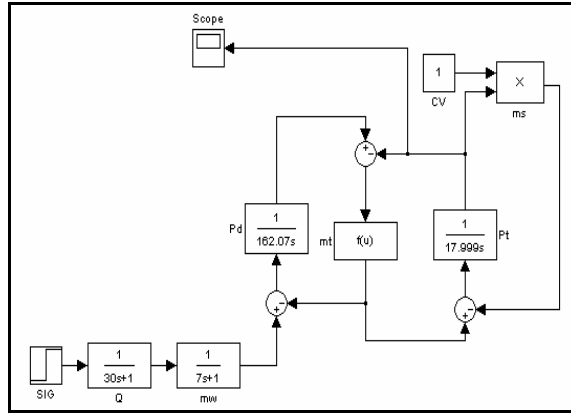
a) Si $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha f(t) = 1$, $\alpha \in (0, 1)$, demuestre que la transformada de Laplace de la función $f(t)$ existe.

b) La transformada de Laplace de la función $t^{-\frac{1}{2}} \cosh(t)$ tiene la forma $I = \left(\sqrt{s + \sqrt{s^2 - 1}} \right) h(s)$. Encuentre $h(s)$ y de aquí la expresión final de la transformada.

P14) (P4 Control 2 2004, Prof. R. Manasevich)

Se muestra en la figura un modelo no lineal de una caldera.

Usted podrá hacer variar la señal de entrada $g(t)$ (señal de combustible) con el fin de mantener dentro de ciertos rangos de operación a la variable de salida $h(t)$ (presión del vapor sobrecalentado).



Una buena aproximación del modelo está dada por:

$$\frac{dr}{dt} = a \cdot m(t) - b \cdot r(t) + b \cdot h(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = c \cdot r(t) - d \cdot h(t)$$

$$\frac{dm}{dt} = e \cdot q(t) - e \cdot m(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = -f \cdot q(t) + f \cdot g(t)$$

a, b, c, d, e y f son constantes positivas. $q(t)$ es el calor del horno, $m(t)$ es el flujo másico de vapor generado y $r(t)$ es la presión del vapor saturado.

a) Encuentre la función de transferencia $W(s) = \frac{H(s)}{G(s)}$.

(Observación: las condiciones iniciales son cero)

b) Si se aplica $g(t) = 4U(t)$, obtenga la salida del sistema $h(t)$.

Dato: $a = b = c = d = e = f = 1$.

P15) (P3b Examen 2004, Prof. R. Manasevich)

Resuelva el siguiente sistema con condiciones iniciales

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \delta(t - \omega) + U(t - 2\omega) - U(t - 3\omega) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X(0) = 0$$

P16) (P3 C1 2005, Prof. R. Manasevich)

Encuentre la trasformada inversa de Laplace de :

$$a) \quad L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}\right), \quad a^2 \neq b^2$$

$$b) \quad L^{-1}\left(\frac{5s + 3}{(s-1)(s^2 + 2s + 5)}\right)$$

P17) (P2 C2 2005, Prof. R. Manasevich)

La función de transferencia que caracteriza a un motor de corriente continua y que relaciona la frecuencia con que gira el motor $y(t)$ y el voltaje de armadura $v(t)$ viene dada por :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{k}{(R_a + L_a s)(Js + b) + k^2}$$

$y(0) = y'(0) = 0$, $k = i_f G$, i_f es la corriente de campo constante, G constante característica del motor, J es la inercia del motor, b es el coeficiente de fricción viscosa y R_a, L_a resistencia e inductancia de armadura respectivamente.

Calcular $y(t)$ ocupando el teorema de convolución.

P18) (P3 C2 2005, Prof. R. Manasevich)

Encuentre la solución del problema con condiciones iniciales nulas $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$:

$$x'' + k^2 x = k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta\left(t - \frac{n\pi}{k}\right)$$

A continuación, encontrar la solución si $t \in \left[\frac{(n-1)\pi}{k}, \frac{n\pi}{k}\right]$

P19) (P4 C1 2006, Prof. R. Manasevich)

Usando transformada de Laplace resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$x_1' = x_1 - x_2 + e^t \cos(t)$$

$$x_2' = x_1 + x_2 + e^t \sin(t)$$

$$x_1(0) = 0 \quad x_2(0) = 0$$

P20) (P2 C2 2006, Prof. R. Manasevich)

Considere la ecuación diferencial:

$$ay' + y = b \cdot f(t - c)$$

$$y(0) = 0$$

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $c \ll 1$ constantes.

- (a) Sea $f(t) = \delta(t)$ la función delta de Dirac. Encuentre $y(t)$ y grafique.
- (b) Sea $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t-i)$. Encuentre $y(t)$ y grafique.
- (c) Para la solución de la parte (b) evalúe $y(N+c)$ con $N \in \mathbb{N}$. Indique las condiciones necesarias para que $y(N+c)$ converja cuando $N \rightarrow \infty$, y demuestre que cuando converge:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y(N+c) = b \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{a}} - 1} \right)$$

- (d) Sea $f(t) = U(t)$ el escalón unitario. Encuentre $y(t)$ y bosqueje.
- (e) Sea $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} U(t-i)$. Encuentre $y(t)$ y bosqueje.

P21) (P1a Exámen 2006, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente edo:

$$y'' + 4y' + 13y = \delta(x - \pi) + \delta(x - 3\pi), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$