



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROFESOR: Raúl Manasevich
AUXILIAR: Alfredo Núñez
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otoño 2007

UNIDAD N°6

SOLUCIONES DE ECUACIONES LINEALES POR MEDIO DE DESARROLLO EN SERIE

P1) (P4 Examen 2003, Prof. R. Manasevich)

Sea la ecuación de Hermite:

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0,$$

- a) Encuentre dos soluciones de esta ecuación en forma de serie de potencias. Demuestre que si λ es un entero par una de las series es un polinomio y si λ es un entero impar la otra serie es un polinomio.

Se define el polinomio de Hermite de grado n ($H_n(x)$) a la solución polinomial de la ecuación de Hermite multiplicada por una constante adecuada de manera que el coeficiente de x^n sea 2^n .

- b) Encuentre $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ y $H_3(x)$ y verificar para esos polinomios la fórmula de Rodríguez

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

- c) Deduzca que:

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

P2) (Tarea 8 2004, Prof. R. Manasevich)

- i) La ecuación $y'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)y = 0$ donde p es una constante, tiene ciertamente una solución en serie de la forma $y = \sum a_n x^n$.

- a) Demostrar que los coeficientes a_n están relacionados por la fórmula de recurrencia de tres términos $(n+1)(n+2)a_{n+2} + \left(p + \frac{1}{2}\right)a_n - \frac{1}{4}a_{n-2} = 0$.
- b) Si hacemos el cambio de variable dependiente $y = we^{-\frac{x^2}{4}}$, probar que la ecuación se transforma en $w'' - xw' + pw = 0$.
- c) Comprobar que la ecuación en b) tiene una fórmula de recurrencia de dos términos y hallar su solución general.

ii) Las soluciones de la ecuación de Airy $y'' + xy = 0$ se llaman funciones de Airy, y tienen aplicaciones en la teoría de la difracción.

- Verificar, usando teoremas vistos en clases, que toda función de Airy no trivial tiene infinitos ceros positivos y a lo sumo uno negativo.
- Hallar las funciones de Airy en forma de series de potencias y comprobar directamente que las series obtenidas convergen para todo x .
- Usando los resultados de (b), escribir la solución general de $y'' + xy = 0$ sin hacer cálculos.

iii) La ecuación de Chebyshev es: $(1 + x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$, con p constante.

- Hallar dos series linealmente independientes que sean soluciones válidas en $|x| < 1$.
- Probar que si $p=n$, donde n es un entero mayor o igual a cero, existe un polinomio de grado n que es solución. Cuando éstos se multiplican por constantes adecuadas, se llaman polinomios de Chebyshev.

iv) La ecuación de Hermite es:

$$y'' - 2xy' + 2py = 0, \text{ con } p \text{ constante.}$$

- Demostrar que su solución general es $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \dots$$

$$y_2(x) = x - \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + \dots$$

- Si p es un entero no negativo, una de esas series termina y se reduce, por tanto, a un polinomio (la primera si p es par, la segunda si p es impar), mientras que la otra sigue siendo una serie infinita. Encontrar los polinomios para $p=0,1,2,3,4,5$.
- Es claro que las únicas soluciones polinómicas de la ecuación de Hermite son múltiplos constantes de los polinomios descritos en (b). Aquellos múltiplos constantes cuyos términos dominantes son de la forma $2^n x^n$ se denotan por $H_n(x)$ y se llaman polinomios de Hermite. Comprobar que:
 $H_0(x)=1$, $H_1(x)=2x$, $H_2(x)=4x^2-2$, $H_3(x)=8x^3-12x$, $H_4(x)=16x^4-48x^2+12$ y que $H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$.
- Verificar que los polinomios citados en la lista de c) vienen dados por la fórmula general de Rodríguez

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

P3) (P1b Examen 2004, Prof. R. Manasevich)

Sin ocupar desarrollo en series, pero sí resultados de series vistos en clases, resuelva la siguiente ecuación:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0.$$

P4) (P4 Examen 2004, Prof. R. Manasevich)

Considere la ecuación:

$$xy'' - y = 0. \quad (1)$$

a) Demuestre que una primera solución de (1) es dada por:

$$y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n-1)!}$$

b) Una segunda solución tiene la forma

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + S(x)$$

Justifique esta afirmación usando lo enseñado en clases.

c) Reemplazando y_2 en (1), encuentre $S(x)$.

Recuerde que $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, para $n \geq 1$ y $H_0 = 0$.

P5) (P3 C3 2005, Prof. R. Manasevich)

Para la ecuación diferencial

$$y'' - xy = 0$$

encuentre dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias en torno a $x = 0$ y evalúe el radio de convergencia de estas soluciones.

P6) (P4 Exámen 2005, Prof. R. Manasevich)

Sea la función $J_p(x)$ una solución de la ecuación de Bessel.

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(1+k+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

(a) Demuestre que

$$J_{p-1}(x) = x^{-p} \frac{d}{dx} [x^p J_p(x)]$$

$$J_{p+1}(x) = -x^p \frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)]$$

y luego que

$$\frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x)$$

(b) Demuestre que $4J_p''(x) = J_{p-2}(x) - 2J_p(x) + J_{p+2}(x)$

P7) (P3 Exámen 2006, Prof. R. Manasevich)

Usando desarrollo en series, determine la solución del problema con condición inicial

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Se pide encontrar el coeficiente general de la serie resultante así como determinar su radio de convergencia.