Control 3 MA 26A, 2006, M. Kowalczyk

1. En este problema vamos a extender el método de variación de parámetros a sistemas lineales con coeficientes constantes.

Sea $X_1(t), \dots, X_n(t)$ un conjunto fundamental de soluciones del sistema $X' = A \cdot X$ donde A es una matriz de constantes. Sea $\Phi(t)$ la matriz cuyas columnas consisten en los vectores $X_1(t), \dots, X_n(t)$ ($\Phi(t)$ se llama matriz fundamental).

Consideremos el sistema nonhomogéneo:

$$X' = A \cdot X + F(t), \text{donde } F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \text{ es una función dada.} \quad (1)$$

(a) Sea $U(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ un vector de funciones. Demuestre que la función $X_p(t) = \Phi(t) \cdot U(t)$ satisface

$$X_p' = \Phi \cdot U' + \Phi' \cdot U.$$

(b) Demuestre que reemplazando X_p por X en (1) se obtiene

$$\Phi(t) \cdot U'(t) = F(t).$$

(c) Usando (b) demuestre que si definimos

$$U(t) = \int \Phi^{-1}(t) \cdot F(t)\, dt$$

entonces

$$X_p(t) = \Phi(t) \cdot U(t) = \Phi(t) \cdot \int \Phi^{-1}(t) \cdot F(t)\, dt$$

es una solución particular de (1).

2.

(a) Resuelva el sistema lineal

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X.$$

¿De qué tipo es el punto critico de este sistema?

(b) Trace un diagrama de fase del sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} X.$$

Discuta la estabilidad del punto critico. Indice la dirección de las trayectorias.

3. Dibuje el diagrama de fase corespondiente a las siguientes ecuaciones.

(a) $x'' - x(1-x^2) = 0.$

(b) $x'' + \frac{x}{1+x^2} = 0.$