

## Funciones racionales

Usualmente si tenemos una suma (o resta) de fracciones el resultado lo expresamos como una sola fracción:  $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$  pero en algunos casos es más conveniente

en la otra dirección esto es, reescribir una fracción como la suma (o resta de) otras fracciones:  $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$

Cuando se trata de integrar funciones racionales  $r(x)$ , esto es de la forma  $r(x) = f(x) / g(x)$ , donde  $f(x)$  y  $g(x)$  son polinomios a veces es útil descomponer estas en funciones racionales más simple en las cuales podamos usar las formulas básicas de integración ya conocidas. Este método se conoce como el **método de fracciones parciales**.

### Guía para la descomposición en fracciones parciales de $r(x) = f(x)/g(x)$

1. Si el grado del polinomio del numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador, dividimos los polinomios usando división larga y nos quedará un cociente de integración inmediata y un residuo.

2. Expresa  $g(x)$  como un producto de factores lineales  $ax + b$  ó factores cuadráticos irreducible  $ax^2 + bx + c$ , luego “recoger” los factores repetidos tal que  $g(x)$  sea un producto de factores diferentes de la forma  $(ax+b)^n$  ó  $(ax^2+bx+c)^n$  para un entero no negativo  $n$ .

3. Aplicar las siguientes reglas.

**Regla a.** Por cada factor  $(ax+b)^n$  con  $n \geq 1$ , la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de  $n$  fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Donde cada numerador  $A_k$  es un número real.

**Regla b.** Por cada factor  $(ax^2+bx+c)^n$  con  $n \geq 1$ , con  $ax^2+bx+c$  irreducible, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de  $n$  fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Donde cada  $A_k$  y  $B_k$  es un número real. **Ejercicios: Halla la descomposición en fracciones parciales**

1.  $\frac{5x+7}{x^3+2x^2-x-2}$       2.  $\frac{x^2+1}{x(x-1)^3}$       3.  $\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$       4.  $\frac{x^5-3x^2+12x-1}{x^3(x^2+x+1)(x^2+2)^3}$

6.  $\frac{4x-1}{(x-1)^2(x+2)}$       7.  $\frac{x^2+2x-1}{(2x^3+3x^2-2x)}$       8.  $\frac{3x^2-x+9}{x^3+3x^2}$       9.  $\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}$

10.  $\frac{2x^3+7x+5}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$       11.  $\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}$