Ecuaciones lineales de segundo orden

Coef. constantes:

$y'' + ay' + by = g(x)$ (L) ie, $\mathcal{L}(y) = g(x)$

Consideramos la ecuación homogénea

$y'' + ay' + by = 0$ (H) ie, $\mathcal{L}(y) = 0$

Las soluciones de (L) son suma de la solución homogénea y una solución particular.

i) Solución homogénea

Consideramos el polinomio característico de (H)

$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$

Sean λ_1, λ_2 las raíces de $p(\lambda)$. Entonces las soluciones y_H de (H) son de la forma:

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow y_H = C_1 x e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $\Rightarrow y_H = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

ii) Solución particular

Consideramos $y'' + ay' + by = Ae^{\mu x}$

y el polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$

Si $p(\mu) \neq 0$

$\Rightarrow y_p = B e^{\mu x}$ con $B = \dfrac{A}{p(\mu)}$

Si μ es raíz de p con mult. 1

$\Rightarrow y_p = B x e^{\mu x}$ (B a determinar)

Si μ es raíz de p con mult 2

$\Rightarrow y_p = B x^2 e^{\mu x}$ (B a determinar)

En general, para $y'' + a y' + b y = q_m(x) e^{\mu x}$ con $q_m(x)$ pol. grado m:

$p(\mu) \neq 0 \Rightarrow y_p = (B_0 + B_1 x + \dots + B_m x^m) e^{\mu x}$

μ mult 1 $\Rightarrow y_p = x(B_0 + B_1 x + \dots + B_m x^m) e^{\mu x}$

μ mult 2 $\Rightarrow y_p = x^2(B_0 + B_1 x + \dots + B_m x^m) e^{\mu x}$

donde $B_0 \dots B_m$ deben ser determinados

Recordar además que si tenemos

$y'' + a y' + b y = q_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ v $q_m(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$

se "completa" el lado derecho de la ecuación

$y'' + a y' + b y = q_m(x) e^{\alpha x} e^{i\beta x} = q_m(x) e^{\overbrace{(\alpha + i\beta)}^{\mu} x}$

Se resuelve como antes y se elige la parte real o imaginaria dependiendo de si el lado derecho original era con $\cos(\beta x)$ o $\operatorname{sen}(\beta x)$

Recordar además

$L(\phi_1) = q_1$
$L(\phi_2) = q_2$ $\Rightarrow L(\phi_1 + \phi_2) = q_1 + q_2$