Pregunta 1

(c) Esta parte tiene dos formas de hacerla: deduciendo una fórmula para X_p a partir de b) o utilizando el X_p propuesto en el enunciado de esta parte y comprobando que es solución de $X' = AX + F(t)$ (1). Veamos ambas formas

i) Por deducción

Sea $X_p = \phi(t)U(t)$, con $U(t)$ por determinar. Si Xp es solución de (1), entonces cumple b), por lo que se tiene

$\phi(t)U'(t) = F(t)$

Como $\phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo, es invertible, por lo que

$$U'(t) = \phi(t)^{-1}F(t) \Longrightarrow \int U'(t)dt = \int \phi(t)^{-1}F(t)dt$$

$$\Longrightarrow U(t) = \int \phi(t)^{-1}F(t)dt$$

Esto es lo que queríamos encontrar. Entonces concluimos que

$$X_p = \phi(t)U(t) = \phi(t)\int \phi(t)^{-1}F(t)dt$$

ii) Por comprobación

Proponemos

$$X_p = \phi(t)U(t) = \phi(t)\int \phi(t)^{-1}F(t)dt$$

como solución de (1). Notamos que X_p está bien definido pues $\phi(t)$ es invertible. Luego, debemos verificar que se cumpla $X_p' = AX_p + F(t)$. Calculemos X_p'.

$$X_p' = (\phi(t)U(t))' = \phi'(t)U(t) + \phi(t)U'(t) \qquad (*)$$

Pero tenemos dos cosas:

$$U'(t) = (\int \phi(t)^{-1}F(t)dt)' = \phi(t)^{-1}F(t)$$

$$\phi'(t) = A\phi(t)$$

Reemplazando los valores de $U'(t)$ y $\phi'(t)$ en $(*)$, tenemos

$$X_p' = A(\phi(t)U(t)) + \phi(t)\phi(t)^{-1}F(t)$$
$$\implies X_p' = AX_p + F(t)$$

Luego, X_p propuesto es solución de (1).

Observaciones:

- La parte b) sólo se puede usar de forma directa si lo estamos haciendo por deducción, pues en este método se asume que X_p de la forma $\phi(t)U(t)$ es solución de (1), por lo que se cumple b), y con eso tratamos de deducir $U(t)$. Si se hace por comprobación, hay que ver que b) se cumpla, pues no podemos asumir que X_p es solución de (1), pues es lo que estamos demostrando.

- Es importante argumentar que $\phi(t)$ es invertible por ser matriz fundamental.