Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
MA26A Sección 3 2006

Pauta P3 C2 2006

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Gustavo Angulo & Diego Morán
Ayudante: Daniel Lillo

P3 Consideremos la condición inicial $y(0) = y_0$ y $y^{'}(0) = y_1$ aplicada a cada una de las siguientes Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden:

a) $x^2y^{''} = 0$
b) $x^2y^{''} - 2xy^{'} + 2y = 0$
c) $x^2y^{''} - 4xy^{'} + 6y = 0$

Se le pide encontrar, para cada ecuación, **todos** los valores de y_0 e y_1 que hacen que el problema de condiciones iniciales correspondiente tenga solución.

Sol: a) Reconocemos una ecuación de Euler, así que proponemos una solución del tipo $y(x) = x^{\alpha}$. Reemplazando en la ecuación, se obtiene:

$$x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} = 0$$

Los raíces de la ecuación anterior son $\alpha = 0$ *o* $\alpha = 1$ **(0.5 pts)**

Así, se obtiene el siguiente conjunto fundamental:

$$\{x^0, x^1\}$$

Entonces la solución General de la Ecuación Homogénea es:

$$y(x) = c_1 + c_2x \quad con\ c_1,\ c_2 \in I\!R \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

Calculemos la derivada de y:

$$y^{'}(x) = c_2$$

Ahora impongamos las condiciones iniciales en $x = 0$:

$$c_1 + c_2 0^1 = y_0$$

$$c_2 = y_1$$

O sea, se debe tener:

$$c_1 = y_0 \ y \ c_2 = y_1 \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

De lo anterior, vemos que para cualquier valor de $y_0, \ y_1 \in I\!R$ podemos encontrar (despejar) las constantes $c_1, \ c_2$, es decir, la solución al problema de condiciones iniciales existe, y está dada por:

$$y(x) = y_0 + y_1 x \qquad \textbf{(0.5 pts)}$$

b) Esta ecuación es también del tipo Euler, así que suponemos una solución de la forma $y(x) = x^{\alpha}$. Reemplazando en la ecuación, obtenemos los siguientes valores $\alpha = 1 \ o \ \alpha = 2$.

Entonces la solución General de la Homogénea es:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 \quad con \ c_1, \ c_2 \in I\!R \qquad \textbf{(1 pto)}$$

Calculemos la derivada de y:

$$y^{'}(x) = c_1 + 2c_2 x$$

Ahora impongamos las condiciones iniciales en $x = 0$:

$$c_1 0^1 + c_2 0^2 = y_0$$

$$c_1 + 2c_2 0^1 = y_1$$

O sea, se debe tener:

$$0 = y_0 \ y \ c_1 = y_1$$

Se concluye entonces que necesariamente $y_0 = 0$. Además, para que exista la solución, basta que $c_1 = y_1$ (o sea, c_1 puede ser depejado para cualquier valor de $y_1 \in I\!R$); c_2 puede ser cualquier valor en $I\!R$.

La solución del problema de condición inicial en este caso es:

$$y(x) = y_1 x + c_2 x \quad con \ c_2 \in I\!R \qquad \textbf{(1 pto)}$$

c) Esta ecuación es también del tipo Euler, así que suponemos una solución de la forma $y(x) = x^{\alpha}$. Reemplazando en la ecuación, obtenemos los siguientes valores $\alpha = 2 \ o \ \alpha = 3$.

Entonces la solución General de la Homogénea es:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 \quad con \ c_1, \ c_2 \in I\!R \qquad \textbf{(1 pto)}$$

Calculemos la derivada de y:

$$y^{'}(x) = 2c_1 x + 3c_2 x^2$$

Ahora impongamos las condiciones iniciales en $x = 0$:

$$c_1 0^2 + c_2 0^3 = y_0$$

$$2c_1 0 + 3c_2 0^2 = y_1$$

O sea, se debe tener:

$$0 = y_0 \ y \ 0 = y_1$$

Se concluye entonces que necesariamente $y_0 = 0$ e $y_1 = 0$. Además, c_1 y c_2 pueden tomar cualquier valor en $I\!R$.

La solución del problema de condición inicial en este caso es:

$$y(x) = y_1 x + c_2 x \quad con\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(1 pto)}$$

OBS:

- Si se llegaba a los correctos posibles valores para $y_0,\ y_1$, pero por un razonamiento erróneo, se descuentan **0.5 pts**.
- Si se llegaba a los correctos posibles valores para $y_0,\ y_1$, pero no se argumentaba, se descuentan **0.2 ptos**.
- Si se ocupaba el método usado para resolver ecuaciones de coeficientes *constantes* (es decir, suponer $y(x) = e^{\lambda x}$) se bajaron **0.8 ptos**.
- Como es usual, si se usaron 2 métodos para encontrar la solución homogénea, el puntaje se asigna según lo obtenido en el peor caso (a menos, por ejemplo, que el peor caso sea un error de cálculo...)
- En general, si había errores algebraicos no se quitó todo el puntaje, por ejemplo, si calculaban mal los α, se tomaba en cuenta buena la conclusión (si era consecuente con los valores de α obtenidos).
- La ecuación de la parte a) tenía algo de especial: se podía resolver tanto con el método de Euler cono con el típico para resolver ecuaciones a coeficientes constantes (notar que no era una ecuación a coeficientes constantes); son ecuaciones equivalentes (tienen las mismas soluciones). La razón es que las soluciones de

  $$x^2 y^{''} = 0 \qquad (A)$$

  son las mismas que las de

  $$y^{''} = 0 \qquad (B)$$

  En efecto, si y definida en $\mathbb{R}$ es solución de (B) entonces claramente y es solución de (A) (también definida en todo $\mathbb{R}$). Lo anterior prueba que las soluciones de (B) están incluidas en el conjunto de soluciones de (A). Para ver la otra inclusión, basta observar que el conjunto de las soluciones de (A) es un espacio vectorial de dimensión 2, que el conjunto de las soluciones de (B) está incluido en el de las soluciones de (A) y que el espacio de soluciones de (B) es de dimensión 2.

`The End`