

Pregunta 1

(a) Encuentre la solución general del problema

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$$

Sol:

Primero resolvemos la ecuación homogénea

$$y'' - 2y' + y = 0$$

El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

$$p(\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Luego el conjunto fundamental es $\{e^x, xe^x\}$, por lo que la solución de la ecuación homogénea es de la forma

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

(1.0 punto)

Ahora busquemos una solución particular usando variación de parámetros

$$y_P(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$$

Calculamos el Wronskiano asociado al conjunto fundamental

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$C_1(x) = - \int \frac{xe^x}{e^{2x}} \frac{e^x}{1+x^2} = - \int \frac{x}{1+x^2} = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$C_2(x) = \int \frac{e^x}{e^{2x}} \frac{e^x}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$$

Así la solución particular es

$$y_P(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2)e^x + \arctan(x)xe^x$$

(1.0 punto)

Luego, la solución general está dada por

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)e^x + \arctan(x)xe^x$$

(b) Resuelva la ecuación diferencial de la parte (a) sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Sol:

$$y(0) = C_1 \implies C_1 = 1$$

(1.0 punto)

$$y'(x) = C_1e^x + C_2[e^x + xe^x] - \frac{x}{1+x^2}e^x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)e^x + \frac{1}{1+x^2}xe^x + \arctan(x)[e^x + xe^x]$$

$$y'(0) = C_1 + C_2 = 1 + C_2 = 0 \implies C_2 = -1$$

(1.0 punto)

Luego la solución al problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = e^x - xe^x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)e^x + \arctan(x)xe^x$$

(c) Verifique que $y_1(x) = x^{-1/2} \cos(x)$, $y_2(x) = x^{-1/2} \sin(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea de

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x^{3/2}$$

Determine la solución general de la ecuación no homogénea.

Sol:

La verificación es sencilla, por lo que la omitimos (0.5 puntos). Para ver que son linealmente independientes, calculamos el Wronskiano asociado a y_1, y_2 .

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x^{-1/2} \cos(x) & x^{-1/2} \sin(x) \\ -\frac{1}{2}x^{-3/2} \cos(x) - x^{-1/2} \sin(x) & -\frac{1}{2}x^{-3/2} \sin(x) + x^{-1/2} \cos(x) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}x^{-2} \sin(x) \cos(x) + x^{-1} \cos^2(x) + \frac{1}{2}x^{-2} \sin(x) \cos(x) + x^{-1} \sin^2(x) \\ &= [\sin^2(x) + \cos^2(x)]x^{-1} = x^{-1} \end{aligned}$$

Como la ecuación está definida para $x \neq 0$, el Wronskiano no se anula, por lo que las funciones son linealmente independientes. (1.0 punto)

Para encontrar una solución particular, utilizamos variación de parámetros, normalizando previamente la ecuación:

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = x^{-1/2}$$

Como $\{y_1, y_2\}$ conforman un conjunto fundamental para la ecuación homogénea, tenemos

$$y_P(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

$$C_1(x) = - \int \frac{x^{-1/2} \sin(x)}{x^{-1}} x^{-1/2} = - \int \sin(x) = \cos(x)$$

$$C_2(x) = \int \frac{x^{-1/2} \cos(x)}{x^{-1}} x^{-1/2} = \int \cos(x) = \sin(x)$$

$$\implies y_P(x) = \cos(x)x^{-1/2} \cos(x) + \sin(x)x^{-1/2} \sin(x) = x^{-1/2}$$

Luego, la solución general es

$$y(x) = C_1 \cos(x)x^{-1/2} + C_2 \sin(x)x^{-1/2} + x^{-1/2}$$

(0.5 punto)