MA26A-3, Otoño 2006
Guía Ecuaciones Exactas

Ejercicio Resuelto

P1 Resuelva la siguiente Ec. Diferencial, por el método de Ec. Exactas:

$$y' = -\frac{2y(y-1)}{x(2y-1)}$$

Sol:

Primero hay que verificar si la ecuación es o no exacta, llamemos

$$M(x,y) = 2y(y-1) \qquad y \qquad N(x,y) = x(2y-1)$$

para que la ecuación sea exacta se debe cumplir:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

En nuestro caso $\frac{\partial M}{\partial y} = 4y - 2$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 2y - 1$, luego la ecuación NO es exacta, por lo que debemos usar factor integrante.

Usemos factor integrante $\mu(x)$.

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

OBS: notar que si la ecuación es efectivamente Exacta, el factor integrante resulta una constante no nula.

Como se tiene que $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y-1}{x(2y-1)}$, obtenemos

$$\mu(x) = e^{\ln(|x|)}$$

Resolvamos para $x > 0$ ($x < 0$ es análogo).
El factor integrante es $\mu(x) = x$, usándolo, la siguiente ecuación nos queda exacta:

$$y^{'} = -\frac{2y(y-1)}{x(2y-1)}$$

Para resolver esta Ecuación Exacta debemos encontrar $\phi(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M \quad (1) \quad y \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = N \quad (2)$$

De (1):

$$\phi(x, y) = \int M dx + C(y) = \int 2xy^2 - 2xy \ dx + C(y) = y^2x^2 - yx^2 + C(y) \quad (3)$$

De (2) y (3):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = 2yx^2 - x^2 + C^{'}(y) = 2yx^2 - x^2 = N(x, y) \Leftrightarrow C^{'}(y) = 0$$

$$\Longrightarrow C(y) = C, \ C \in \mathbb{R}$$

Luego,

$$\phi(x, y) = y^2x^2 - yx^2 + C, \ C \in \mathbb{R}$$

Finalmente, lo que nos dice éste método es que las soluciones $y = y(x)$ son las que cumplen:

$$\phi(x, y) = k, \ k \in \mathbb{R}$$

y particularizando para nuestra ecuación:

$$y^2x^2 - yx^2 = C, \ C \in \mathbb{R}$$

OBS: Se integró c/r a x la ecuación (1), para poder encontrar ϕ, pero se podría también haber comenzado integrando c/r a y la ecuación (2) (y luego, ocupar la ecuación (1) y derivar, etc).

Más Problemas

1. Resuelva las Siguientes Ecuaciones por el método de Ec. Exactas (Podría ser necesario usar factor integrante).

   a) $y' = \frac{-6xy}{4y+9x^2}$

   b) $y' = \frac{x^4-x+y}{x}$

   c) $y' = \frac{y^2+2xy}{x^2}$

   d) $y' = \frac{y^2}{x^2+xy}$

   e) $y' = \frac{xy\sin(x)-2y\cos(x)}{2x\cos(x)}$

   f) $y' = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}$

   g) $y' = \frac{1+\ln(x)+y/x}{1-\ln(x)}$

2. Determine el valor de $N(x,y)$ de modo de que la siguiente ecuación diferencial resulte exacta.

$$y' = \frac{-(x^2+y^2)}{N(x,y)}$$

THE END

DMR