Clase Auxiliar 1

1. Verifique que las siguentes funciones ϕ son soluciones de cada ecuación.

(a) $\phi(x) = e^{-sen\,x}$, por $y' + (\cos x)y = 0$

(b) $\phi(x) = \operatorname{sen} x - 1$, por $y' + (\cos x)y = \operatorname{sen} x \cos x$

2. Considérese la ecuación $y' = -5y + 2$.

(a) Demuestre que la función $\phi(x)$ dada por

$$\phi(x) = \frac{2}{5} + ce^{-5x}$$

es una solución por cada constante c.

(b) Suponiendo que cada solución tiene esta forma encuentre la solución tal que $\phi(1) = 2$.

(c) Encuentre la solución tal que $\phi(1) = 3\phi(0)$.

3. Resuelva las ecuaciones diferenciales que se proponen a continuación. En cada caso encuentre la solucion general y si se especifica una condición inicial encuentre la solución particular.

(a) $y' = \frac{sen\,x}{y}$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 1$.

(b) $y' = \frac{y^2 e^x}{1-e^x}$; $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

(c) $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$

4.

(a) Encuentre la solución del problema de condición inicial

$$\begin{cases} y' & = 2y^{1/2} \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

donde $y_0 > 0$. ¿Es la solucion de este problema única?

(b) Encuentre todas soluciones de esta ecuación al que $y(x_0) = 0$.

5 (Ecuaciones homogéneas). Sea $f(x, y)$ una función definida en el dominio D del plano (x, y). Diremos que $f(x, y)$ es homogénea (de grado cero) en D si para cada real α y cada punto $(x, y) \in D$ tales que $(\alpha x, \alpha y) \in D$ se tiene $f(x, y) = f(\alpha x, \alpha y)$.

(a) Verifique que la función $f(x,y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, para $x \neq 0$, $y \neq 0$, es homogénea.

(b) Considérese la ecuación diferencial

$$y' = f(x,y),$$

donde $f(x,y)$ es homogénea. Demuestre que la transformación $y(x) = xu(x)$ reduce la ecuación a una ecuación equivalente de variables separables.

(c) Encuentre la solución general de la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

(d) Encuentre una solución general de la ecuación

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

(e) Encuentre la solución particular de la ecuación

$$\begin{cases} y' &= \frac{y^2+x^2}{2yx} \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

6. Resuelva las ecuaciones diferenciales.

(a) $y' = y + x^2$

(b) $y' = 3y + e^x$

(c) $y' = 3y + \cos x$