Universidad de Chile
Depto. de Ingeniería Matemática

Pauta Examen

MA22A – Cálculo en Varias Variables – Semestre Otoño 2007

Profesor: Marcelo Leseigneur P. **Fecha:**
Auxiliar: Renzo Lüttges – José Miguel Vera – Thomas Capelle 1 de Julio de 2007

Pregunta 1:

a) Sabiendo que la ecuación $\ln z + x^2 - y + z - 1 = 0$ define a z como función implícita de x e y, se pide obtener: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Si la ecuación $\ln z + x^2 - y + z - 1 = 0$, define a z como función implícita de x e y, derivando respecto de x se obtiene

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2x + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

de donde $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz}{1+z}$.

Derivando la ecuación inicial respecto de y conseguimos

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 1 + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (*)$$

y por tanto, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{1+z}$.

Si ahora derivamos la igualdad (*) respecto de x deducimos que

$$-\frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

y teniendo en cuenta la anteriores valores obtenidos de la derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ se consigue la igualdad

$$\frac{2x}{(1+z)^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

y por consiguiente, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2xz}{(1+z)^3}$.

b) Sea $z(x,y)$ una función clase C^2. Considere la función $\tilde{z}(\rho,\theta) = z(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Calcule una expresión en cartesianas para $\dfrac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial\rho\,\partial\theta}$.

Solución: Aplicando la regla de la cadena al cambio $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ (inversamente $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = arctg\dfrac{y}{x}$), sabemos que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-\rho\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\rho\cos\theta = -y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}$$

Finalmente

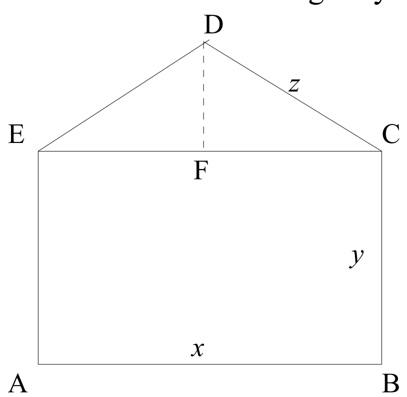
$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) = \left[T := \frac{\partial z}{\partial\theta}\right] = \frac{\partial T}{\partial\rho} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \left(-y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

Pregunta 2:

a) Se quiere construir un Pentágono utilizando un rectángulo y un triángulo isosceles, como se muestra en la figura:



Si el pentágono tiene un perímetro fijo P_0, determine las longitudes de los lados del pentágono que maximizan su área. Justifique que el valor encontrado es un máximo.

Solución. Llamando x la longitud del lado AB, y la longitud de BC, z la longitud de CD, el área del pentágono viene dada por:

$$f(x,y,z) = xy + \frac{x}{2}\sqrt{z^2 - x^2/4}$$

función que hay que maximizar con la condición de que $x + 2y + 2z - P_0 = 0$. Formamos la función de Lagrange

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + \frac{x}{2}\sqrt{z^2 - x^2/4} + \lambda(x + 2y + 2z - P_0)$$

Calculamos los puntos críticos de la función de Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - x^2/4} - \frac{x^2}{8}\frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2/4}} + \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{x}{2}\frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2/4}} + 2\lambda = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + 2y + 2z - P_0 = 0 \qquad (4)$$

Sustituyendo $2\lambda = -x$ en (3) obtenemos $x\left(\frac{z}{2\sqrt{z^2 - x^2/4}} - 1\right) = 0$, y como debe ser $x > 0$, se sigue que $\frac{z}{2\sqrt{z^2 - x^2/4}} - 1 = 0$, lo que implica que $x^2 = 3z^2$ y, por tanto $\sqrt{z^2 - x^2/4} = \frac{z}{2}$. Sustituyendo ahora en (1) y teniendo en cuenta que $y = P_0/2 - z - x/2 = P_0/2 - z - \sqrt{3}z/2$, obtenemos:

$$\frac{P_0}{2} - z - \sqrt{3}z + \frac{z}{4} - \frac{3z}{4} = 0$$

de donde resulta $z = \frac{P_0(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$, $x = (2-\sqrt{3})P_0$, $y = \frac{P_0(3-\sqrt{3})}{6}$.

b) Dada una matriz A de $n \times n$ simétrica definida positiva, $\vec{a}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$, calcule el mínimo de la función $f(x) = x^T A x + c^T x$ (con $x \in \mathbb{R}^n$) sobre el conjunto:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, a^T x = \beta\}$$

Calculte también el multiplicador de Lagrange λ. Justifique bien que el punto x_0 calculado es el mínimo de esta función en *C*.
Para el caso particular en que $A = I$, $a = (1,1,\dots,1)$, $c = \vec{0}$ y $\beta = 1$. Comente.

Sol:
Escribimos el Lagrangeano $L = f(x) + \lambda(a^T x - \beta)$, y calculamos el gradiente de este:

$$\nabla L(x) = \nabla f(x) + \lambda a$$

Donde $\nabla f(x) = 2Ax + c$, o sea se obtiene la ecuación:

$$\nabla L(x) = 2Ax + c + \lambda a = 0$$

Despejando x se obtiene:

$$x = \frac{1}{2}A^{-1}(-c - \lambda a)$$

Ahora reemplazando x en la constricción:

$$\frac{1}{2}a^T A^{-1}(-c - \lambda a) = \beta$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{a^T A^{-1}c + 2\beta}{a^T A^{-1}a}$$

El punto es claramente un mínimo ya que la función tiene Hessiano definido positivao ($H_f = A$)
La parte siguiente es solo reemplazar.

Pregunta 3:

a) Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies de ecuaciones $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = 6-x^2-y^2$. Describa gráficamente la región y resuelva utilizando integrales dobles y triples.

a) Como un primer paso para la obtención del volumen limitado por el paraboloide $z = 6 - x^2 - y^2$ y el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$, calculamos la curva intersección de ambas superficies. Esto nos lleva a la resolución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 6 - \left(x^2+y^2\right) \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow z = 6 - z^2.$$

Las soluciones de esta ecuación son $z = -3, z = 2$ y descartamos la solución negativa pues $z = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$. Por tanto, el paraboloide y el plano intersecan en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4, z = 2$, cuya proyección sobre el plano $z = 0$, es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

De esta forma, el volumen limitado por el cono y el paraboloide puede expresarse mediante una integral doble en la forma

$$V = \iint_R \left(6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dA,$$

donde R es el círculo $R = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

Ahora resolvemos la integral doble aplicando un cambio a coordenadas polares. Puesto que la región R puede escribirse en coordenadas polares en la forma $R = \left\{(\theta, r) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2\right\}$, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \left(6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(6 - r^2 - r\right) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} d\theta = \frac{32}{3}\pi. \end{aligned}$$

Utilizando integrales triples y coordenadas cilíndricas el volumen sería

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{6-r^2} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(6 - r^2 - r\right) r dr d\theta = \frac{32}{3}\pi.$$

b) Calcular la integral $\iint_R e^{y^3}\,dA$, donde R es la región del plano limitada por las curvas $y=1$, $x=0$, $y=\sqrt{x}$.

b) Calculamos $\iint_R e^{y^3}\,dA$ describiendo la región R como una región horizontalmente simple. La región R puede expresarse como $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1, 0\le x\le y^2\}$. Por consiguiente,

$$\iint_R e^{y^3}\,dA=\int_0^1\int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx\,dy=\int_0^1 y^2 e^{y^3}\,dy=\left[\frac{e^{y^3}}{3}\right]_0^1=\frac{e-1}{3}.$$

c) Calcule la integral $\int_2^4 \int_{\frac{4}{x}}^{\frac{(20-4x)}{(8-x)}} (4y-y^2)\,dy\,dx$.

<u>Indicación</u>: Use Fubini de manera adecuada.

Sol: La idea aquí es usar la indicación. Por lo tanto hay que cambiar los límites de integración:

$$4/x\le y\le (20-4x)/(8-x)\Rightarrow 4/y\le x\le \frac{20-8y}{4-y}$$

Además si $2\le x\le 4\Rightarrow 1\le y\le 2$. Ahora integrando:

$$I=\int_1^2 (4y-y^2)\int_{4/y}^{\frac{20-8y}{4-y}} dx\,dy=\int_1^2 (4y-y^2)\left(\frac{20-8y}{4-y}-4/y\right)dy$$

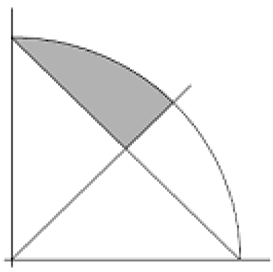
$$=\int_1^2 (4y-y^2)\left(\frac{20y-8y^2-4(4-y)}{4y-y^2}\right)dy=\int_1^2 20y-8y^2-16dy=4/3$$

Pregunta 4:

Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\iint_A (x^2+y^2)^{-3/2}\, d(x,y)$, donde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leqslant 1 \,,\, x+y\geqslant 1 \,,\, y\geqslant x\}$.

b) $\displaystyle\iiint_A \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d(x,y,z)$, donde A es el recinto limitado inferiormente por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y superiormente por el plano $z=4$.

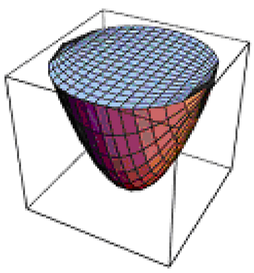


Solución. (a) La región A se muestra sombreada en la figura de la izquierda. La función que hay que integrar sugiere un cambio a coordenadas polares. La descripción de A en coordenadas polares es fácil:

$$A=\left\{(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta) : \pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\ \frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}\leqslant\rho\leqslant 1\right\}$$

Por tanto:

$$\iint_A (x^2+y^2)^{-3/2}d(x,y)=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\int_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1}\frac{1}{\rho^2}d\rho\right]d\theta=\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta-1)d\theta=1-\frac{\pi}{4}$$



(b) A la izquierda se ha representado el paraboloide cortado por el plano $z=4$. Observa que A es un conjunto de *tipo I* en $\mathbb{R}^3$. De hecho, como la proyección de A sobre el plano XY es el disco centrado en 0 de radio 2, $D(0,2)$, tenemos $A=\{(x,y,z) : x^2+y^2\leqslant 4,\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant 4\}$. En consecuencia:

$$\iiint_A \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}d(x,y,z)=\iint_{D(0,2)}\left[\int_{x^2+y^2}^{4}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dz\right]d(x,y)=$$

$$=\iint_{D(0,2)}\left(\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}(4-(x^2+y^2))\right)d(x,y)=$$

(pasando a coordenadas polares e integrando por partes para calcular una primitiva de $\rho^2 e^{\rho}$)

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^2\frac{e^{\rho}}{\rho}(4-\rho^2)\rho\, d\rho\right]d\theta=2\pi\int_0^2(4e^{\rho}-\rho^2e^{\rho})d\rho=4\pi(e^2-1)$$