Universidad de Chile
Depto. de Ingeniería Matemática

Control #3

MA22A – Cálculo en Varias Variables – Semestre Otoño 2007

Profesor: Marcelo Leseigneur P. **Fecha:**
Auxiliar: Renzo Lüttges – José Miguel Vera – Thomas Capelle 6 de Junio de 2007

Problema 1:
Considere una carga puntual de magnitud q situada en el origen del plano cartesiano. Nos interesa calcular el potencial electrostático V alrededor de la carga. Para esto resolveremos la ecuación de Poisson:

$$\Delta V(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

Para resolverla, seguiremos los siguientes pasos:

i. Considere la función $\tilde{V}(r,\theta)=V\circ T(r,\theta)$ donde T es la transformación dada por $T(r,\theta)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, y su inversa es $r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\theta=arctg(\frac{y}{x})$.
   Muestre que: $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \theta^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{V}}{\partial r}$.

ii. Suponga ahora que el potencial no depende del ángulo θ . Muestre la forma que toma la ecuación de Poisson en coordenadas polares bajo estas condiciones, y resuélvala con las técnicas conocidas. Finalmente exprese su resultado en coordenadas Cartesianas.

Problema 2:
a) Se desea planificar la construcción de dos puertos, uno situado en el continente y el otro en una isla, de modo que la distancia recorrida en bote para cruzar entre ambos sea la menor posible.
Para esto se han aproximado las líneas costeras del continente y de la isla, por las funciones f_1 y f_2 respectivamente.

$$f_1(x)=2x+1$$
$$f_2(x)=-2x(x-1)-10$$

i. Sean (x_1,y_1) y (x_2,y_2) las coordenadas de los puertos de la isla y del continente. Resuelva el problema de distancia mínima **usando multiplicadores de Lagrange.**

ii. Considere ahora una ciudad situada en el punto $(0,f_1(0))$, calcule las coordenadas (x_1,y_1) y (x_2,y_2) de los puertos, que permiten minimizar el costo del viaje desde la ciudad, por tierra hasta el puerto 1, y luego por mar hasta el puerto 2. Suponga que el costo del viaje es 100 \$/Km por tierra, y 50 \$/Km por mar. **Plantee sólo las ecuaciones.**

Indicaciones:

-Considere que ambos puertos se ubican en la línea costera.

-Calcule la distancia entre la ciudad y el puerto 1 como $\int_0^x f_1(t)\,dt$.

b) Encuentre los puntos sobre el elipsoide $x^2+2y^2+3z^2=1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $3x-y+3z=1$.

Problema 3:

a)

i. Sea $\vec{\sigma}:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}^n$ la parametrización de una curva tal que $\|\vec{\sigma}(t)\|_2 = cte.$. Muestre que $<\vec{\sigma}\,'(t),\sigma(t)>$.

ii. Considere una función $F:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$. Se dice que la curva $\gamma(t)$ es una línea de flujo de *F* si $F(\gamma(t))=\gamma\,'(t)$.

Demuestre que la curva $\gamma(t)=(\frac{1}{1-t},0,\frac{e^t}{1-t})$ es una línea de flujo del campo *F*.

iii. Supongamos que una partícula sigue la trayectoria $\gamma(t)=(t,t^2,t\cos t)$, hasta que en el tiempo $t=\pi$ sale de la trayectoria por la tangente. Calcule la posición de la partícula en el tiempo $t=2\pi$. Calcule además la curvatura de la trayectoria inicial, y la distancia total recorrida por la partícula entre $t=0$ y $t=2\pi$. Encuentre la ecuación del plano normal a la curva en el punto $t=\pi$.

b) Considere la función $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=<a,x>\cdot e^{-\|x\|_2^2}$, donde $a\in\mathbb{R}^n, a\neq 0$ fijo.

i. Determine los puntos críticos de *f* (ie, los $\bar{x}$ tales que $f(\bar{x})=0$)

ii. Calcule el Hessiano de f en todo punto $x_0\in\mathbb{R}^n$.

iii. Determine, usando condiciones de segundo orden, la naturaleza de cada punto crítico de *f*. (máximos, mínimos, u otros).

Tiempo: 3 horas