7 Integral triple de Riemann

7.1 Definición

Llamaremos **rectángulo cerrado** de $\mathbb{R}^3$ (**paralelepípedo**) al producto de tres intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$, es decir

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$

Si los intervalos son abiertos, el **rectángulo** se llama **abierto**. Se llama volumen del rectángulo al producto de las longitudes de los intervalos que lo definen, es decir $V(R) = (b - a)(d - c)(f - e)$.

7.2 Particiones de un rectángulo

Sea $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$. Llamaremos **partición** de R al producto cartesiano de una partición de $[a, b]$, por otra de $[c, d]$ y por otra de $[e, f]$. Es decir, si $P_1 = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b) \in \mathcal{P}([a, b])$, $P_2 = (c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d) \in \mathcal{P}([c, d])$ y $P_3 = (e = z_0 < z_1 < \dots < z_p = f) \in \mathcal{P}([e, f])$, entonces

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3 \\ = \{R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p\} \in \mathcal{P}(R)$$

La partición P consta de $n \cdot m \cdot k$ rectángulos.

Si $P, P' \in \mathcal{P}(R)$, diremos que P' es **más fina que** P , $P' \prec P$, si cada rectángulo de P' está contenido en algún rectángulo de P .

7.3 Sumas de Riemann

Sea $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$,

$$P = \{R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p\} \in \mathcal{P}(R)$$

y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se definen las **sumas inferior y superior de Riemann** de f asociadas a P como

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p m_{ijk} \cdot V(R_{ijk}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p m_{ijk} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) \\ S(f, P) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p M_{ijk} \cdot V(R_{ijk}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p M_{ijk} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

donde

$$m_{ijk} = \inf \{f(x, y, z) : (x, y, z) \in R_{ijk}\} \quad \text{y} \quad M_{ijk} = \sup \{f(x, y, z) : (x, y, z) \in R_{ijk}\}$$

La **suma de Riemann** de f asociada a P y a

$$\{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \chi_{ijk}) \in R_{ijk} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p\}$$

es

$$\begin{aligned} S(f, P, \{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \chi_{ijk})\}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \chi_{ijk}) \cdot V(R_{ijk}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \chi_{ijk})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) \end{aligned}$$

7.4 Propiedades

Sean $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, $P, P' \in \mathcal{P}(R)$ y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera $(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \chi_{ijk}) \in R_{ijk} \in P$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ y $1 \leq k \leq p$, se tiene que

$$s(f, P) \leq S(f, P, \{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \chi_{ijk})\}) \leq S(f, P)$$

2. Si $P \prec P'$, entonces

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$$

3. Si m y M son, respectivamente, el infimo y el supremo de f en R , se tiene que

$$m \cdot V(R) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M \cdot V(R)$$

7.5 Integral triple de Riemann

Sean $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se definen las **integrales inferior y superior de Riemann** de f sobre R como

$$\begin{aligned} \underbrace{\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}_{\underline{\quad}} &= \sup \{s(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \\ \overline{\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz} &= \inf \{S(f, P) : P \in \mathcal{P}(R)\} \end{aligned}$$

Es claro, de las propiedades anteriores, que

$$\underline{\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz} \leq \overline{\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}$$

y cuando ambas coinciden se dice que f es **integrable Riemann** sobre R , definiéndose la integral como el valor común que se representará por

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

En caso contrario se dice que f no es integrable Riemann sobre R . Se representará por $\mathcal{R}(R)$ a la familia de todas las funciones que son integrables Riemann sobre R .

7.6 Teorema de caracterización de la integrabilidad Riemann

Sean $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:

1. f es integrable Riemann sobre R .
2. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ tal que $S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.
3. Existe $I \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(R)$ verificando que

$$|S(f, P_\varepsilon, \{(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \chi_{ijk})\}) - I| < \varepsilon$$

para cualquier suma de Riemann asociada a P_ε .

7.7 Propiedades

Sean $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ y $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables Riemann.

1. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \iiint_R [\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)] dx dy dz &= \alpha \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz \\ &+ \beta \iiint_R g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

2. Si $m \leq f(x, y, z) \leq M$ en cualquier punto $(x, y, z) \in R$, entonces

$$m \cdot V(R) \leq \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz \leq M \cdot V(R)$$

3. Si $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, para todo $(x, y, z) \in R$, entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_R g(x, y, z) dx dy dz$$

4. La función valor absoluto de f , $|f|$, es también integrable Riemann y

$$\left| \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_R |f(x, y, z)| dx dy dz$$

7.8 Teorema de Fubini

Sean $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada e integrable sobre R . Supongamos que para cada $x \in [a, b]$ existe la integral

$$J(x) = \iint_{R_1} f(x, y, z) dy dz \quad \text{donde} \quad R_1 = [c, d] \times [e, f]$$

Entonces también existe la integral de $J(x)$ sobre $[a, b]$ y se cumple que

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b J(x) dx = \int_a^b \left(\iint_{R_1} f(x, y, z) dy dz \right) dx$$

7.9 Notación

Se suele representar

$$\int_a^b \left(\iint_{R_1} f(x, y, z) dy dz \right) dx = \int_a^b dx \iint_{R_1} f(x, y, z) dy dz$$

entendiendo esta última expresión como que en primer lugar hay que hacer la integral doble de f , respecto de y y z , sobre R_1 , y su resultado integrarlo, respecto de x , entre a y b .

7.10 Observaciones

Si aplicamos el teorema de Fubini bidimensional en la integral sobre R_1 se obtiene:

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_e^f dz \int_c^d f(x, y, z) dy$$

Otras posibles formas de aplicar el teorema (invirtiendo variables) serían:

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz &= \int_c^d dy \iint_{R_2} f(x, y, z) dx dz && \text{donde } R_2 = [a, b] \times [e, f] \\ \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz &= \int_e^f dz \iint_{R_3} f(x, y, z) dx dy && \text{donde } R_3 = [a, b] \times [c, d] \end{aligned}$$

pudiendo aplicar después, en ambos casos, el teorema de Fubini bidimensional.

7.11 Integrabilidad de las funciones continuas

Si $f : R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f es integrable Riemann sobre R .

7.12 Contenido nulo

Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto acotado. Se dice que A tiene **contenido nulo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia finita de rectángulos, $\{R_i\}_{i=1}^N$, tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N R_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N V(R_i) < \varepsilon$$

7.13 Ejemplos

1. Cualquier conjunto plano de contenido nulo tiene contenido nulo en $\mathbb{R}^3$.
2. Un conjunto finito de puntos, una sucesión convergente de puntos y un segmento de recta tienen contenido nulo.

3. El grafo de una función continua, definida sobre un conjunto compacto del plano, tiene contenido nulo.
4. Todo subconjunto de un conjunto de contenido nulo tiene contenido nulo.
5. La unión finita de conjuntos de contenido nulo tiene contenido nulo.

7.14 Teorema

Sea $f : R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y sea $D_f(R) \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto de discontinuidades de f en R . Entonces, si $D_f(R)$ tiene contenido nulo, la función f es integrable Riemann sobre R .

7.15 Integral de Riemann sobre otros recintos acotados

Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ acotado y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Se define

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_R \tilde{f}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

donde $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ es cualquier rectángulo que contiene a D y

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & , \text{ si } (x, y, z) \in D \\ 0 & , \text{ si } (x, y, z) \in R \setminus D \end{cases}$$

7.16 Propiedades

La integral de Riemann sobre recintos acotados tiene las mismas propiedades de la integral sobre rectángulos, ya descritas en (7.7), y además

$$\iiint_{A \cup B} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

siempre que $A \cap B$ tenga contenido nulo.

7.17 Integral de Riemann sobre recintos especiales

1. Un recinto $D \subset \mathbb{R}^3$ se llama **x -seccionable** si es de la forma

$$D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, (y, z) \in S_x\}$$

donde S_x , $a \leq x \leq b$, es un recinto acotado de $\mathbb{R}^2$ (en el plano YZ) sobre el que se sabe calcular una integral doble. En este caso, aplicando el teorema de Fubini, se llega a que

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \iint_{S_x} f(x, y, z) \, dy \, dz$$

Para recintos seccionables respecto de los ejes y o z se procede de forma análoga.

2. Un recinto $D \subset \mathbb{R}^3$ se llama **xy -proyectable** si es de la forma

$$D = \{(x, y, z) : (x, y) \in S, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$$

donde $\varphi_1, \varphi_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas con $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$, para todo $(x, y) \in S$, y $S \subset \mathbb{R}^2$ es un recinto acotado sobre el que no es difícil calcular integrales dobles. Aplicando el teorema de Fubini, si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_S dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Para recintos xz -proyectables e yz -proyectables se procede de forma análoga.

7.18 Aplicaciones

1. Cálculo de volúmenes: Si $D \subset \mathbb{R}^3$, su volumen es

$$V(D) = \iiint_D dx dy dz$$

2. Cálculo de masas y centro de gravedad: Si $D \subset \mathbb{R}^3$ representa a un sólido tridimensional con densidad puntual $\rho(x, y, z) \geq 0$, para cada $(x, y, z) \in D$, entonces la masa de D viene dada por

$$m(D) = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$$

y el centro de gravedad de D , (x_g, y_g, z_g) , viene dado por

$$x_g = \frac{1}{m(D)} \iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad y_g = \frac{1}{m(D)} \iiint_D y \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$z_g = \frac{1}{m(D)} \iiint_D z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

7.19 Teorema del Cambio de Variable

Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ compacto y $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto con $D \subset \Omega$. Sea $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, con derivadas parciales continuas, inyectiva en $\overset{\circ}{D}$ y tal que $\varphi^{-1} : \varphi(D) \rightarrow D$ tiene derivadas parciales continuas. Entonces, si $f \in \mathcal{R}(\varphi(D))$ la función $(f \circ \varphi) \cdot |J\varphi| \in \mathcal{R}(D)$ y

$$\iiint_{\varphi(D)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J\varphi(u, v, w)| du dv dw$$

donde $J\varphi$ es el Jacobiano de φ , es decir

$$J\varphi(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

7.20 Algunos cambios de variable usuales

1. Coordenadas cilíndricas: Consiste en aplicar coordenadas polares en uno de los planos (por ejemplo XY) y mantener intacta la otra. Es decir

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases} \quad ; \quad |J\varphi| = \rho$$

con $0 \leq \rho < \infty$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

2. Coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \psi \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \\ z = \rho \cos \psi \end{cases} \quad ; \quad |J\varphi| = \rho^2 \operatorname{sen} \psi$$

con $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \psi \leq \pi$.