MATEMÁTICAS II

Diplomatura en Ciencias Empresariales. Facultad de Ciencias Empresariales. Ourense

Curso 2003-2004

El curso consta de tres capítulos y es una continuación del curso de Matemáticas I que el alumno tuvo que cursar durante el primer cuatrimestre. Por lo tanto, se entiende que dicho alumno ha tratado los temas de álgebra lineal, cálculo en una variable y cálculo en varias variables. En este segundo cuatrimestre, el alumno analizará las técnicas de estática comparativa, el cálculo integral y la teoría de la optimización. Los contenidos de este curso se imparten durante un cuatrimestre en dos horas de teoría semanales y 1 hora de prácticas.

Tema 1. Aplicación de las derivadas parciales en economía

En este tema nos interesa sobre todo estudiar cómo las variables económicas reaccionan a cambios en los parámetros que intervienen en la definición de dichas variables. Este tipo de análisis se conoce en economía como estudios de estática comparativa.

La finalidad de la sección 1.1 es calcular la derivada de una función definida implícitamente por una ecuación. En la sección 1.2 estudiamos el concepto de elasticidad para funciones con varias variables, concepto que ya hemos introducido para funciones de una variable. En la sección 1.3 analizamos las funciones homogéneas y consideraremos algunos ejemplos típicos como la relación entre funciones homogéneas y rendimientos a escala. Finalmente, en la sección 1.4 estudiamos cómo podemos aproximar una función dada por otra función mucho más sencilla de analizar.

A continuación se presenta un resumen de los contenidos teóricos de este tema.

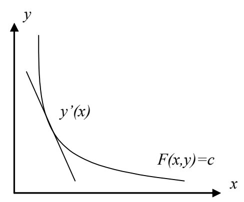
1.1 Derivadas de funciones definidas implícitamente

Sea F una función de dos variables y consideremos la ecuación $F(x,y)=0$. Supongamos que esta ecuación define a y como una función $y=f(x)$ de x en cierto intervalo I. Entonces, $F(x,f(x))=0$ para todo $x\in I$.

Si f es derivable, ¿cuál es la derivada de $y=f(x)$?

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}\qquad \left(F_y'(x,f(x))\neq 0\right).$$

Gráficamente,



El concepto de derivación implícita también se puede generalizar a funciones con n variables.

1.2 Elasticidades parciales

Sea $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. La **elasticidad parcial** de z (ó de f) con respecto de x_i se define como

$$\mathrm{El}_i z = \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{z}.$$

Interpretación. El número $\mathrm{El}_i z$ es aproximadamente igual a la variación porcentual de z producida por un aumento del 1% en x_i, mientras las otras x_j $(j \neq i)$ permanecen constantes.

1.3 Funciones homogéneas

Una función f de dos variables x e y definida en un dominio D es **homogénea** de grado k si para todo $(x,y) \in D$, $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$ para todo $t > 0$.

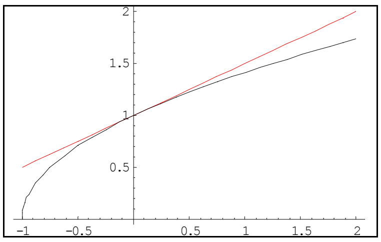
La constante k puede ser cualquier número: positivo, cero o negativo.

Teorema de Euler. $f(x,y)$ es homogénea de grado k $\Leftrightarrow$ $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = kf(x,y)$.

Todas las definiciones anteriores son fácilmente generalizables a funciones con más de 2 variables.

1.4 Aproximación de funciones

Sea $f(x)$ derivable en $x = a$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. La **aproximación lineal** de $f(x)$ en un entorno de a es $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ para x próximo a a.

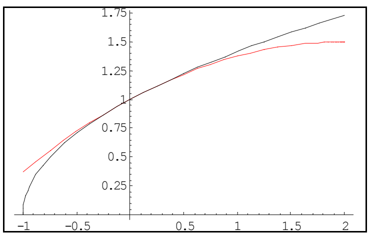


Aprox. lineal de $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $x = 0$.

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables con derivadas parciales en $(x,y) = (a,b)$. La **aproximación lineal** a $f(x,y)$ en un entorno de (a,b) es $f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$ para (x,y) próximo a (a,b).

La **aproximación general** de orden n de $f(x)$ en un entorno de a es el Polinomio de Taylor de orden n

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$ para x próximo a a.



Aproximación de orden 2 de $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $x = 0$.

Tema 2. Integración

2.1 Integrales indefinidas

2.2 La integral definida

2.3 Aplicaciones económicas de la integración

2.4 Métodos de integración

2.5 Extensión del concepto de integral

2.6 Integrales dobles

En este tema consideramos la operación inversa a la derivación: la integración. Este concepto nos permite medir áreas de ciertas regiones que están limitadas no sólo por rectas. Aunque este problema es muy interesante, la integración también nos permite expresar conceptos muy importantes de la estadística y de la economía, como veremos en la sección 2.3.

2.1. Integrales indefinidas

Dada una función f se trata de hallar otra función F cuya derivada sea f. Llamaremos a F una **integral indefinida** de f. **Notación**. $\int f(x)dx = F(x)+c$ cuando $F'(x) = f(x)$.

Integrales inmediatas y reglas generales

(a) $\int 1dx = x + c$

(b) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c$ si $a \neq -1$

(c) $\int \dfrac{1}{x} dx = \log|x| + c$

(d) $\int e^{ax} dx = \dfrac{1}{a} e^{ax} + c$ si $a \neq 0$

(e) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ si $a > 0$ y $a \neq 1$

(f) $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(g) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

2.2 La integral definida

Sea f una función continua definida en el intervalo $[a,b]$. Supongamos que la función F es continua en $[a,b]$ y con derivada $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$. La **integral definida** de f en $[a,b]$ es la diferencia $F(b) - F(a)$. **Notación**. $\int_a^b f(x)dx$ ó $F(x)\Big|_a^b$.

Teorema. Si f es una función continua en $[a,b]$, existe una función $F(x)$ derivable en $[a,b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Nota. La integral $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ existe pero no hay ninguna función estándar cuya derivada sea e^{-x^2}.

Propiedades de la integral definida

(a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(b) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(c) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

(d) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Derivada de la integral definida

Si $a(t)$ y $b(t)$ son derivables y $f(x)$ continua, entonces

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)dx = f(b(t))b'(t) - f(a(t))a'(t)$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$

2.4 Métodos de integración

Integración por partes

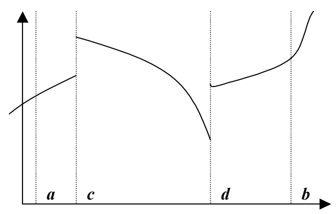
Necesitamos calcular a menudo integrales cuyo integrando es un producto de dos funciones. A partir de la derivada de un producto, obtenemos $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

Integración por sustitución

La regla de la cadena para la derivación da lugar a un método importante para calcular muchas integrales complicadas $\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$, siendo $x = g(t)$ y $dx = g'(t)\,dt$.

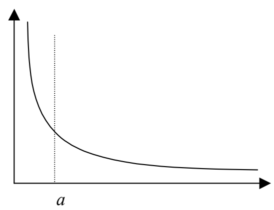
2.5 Extensión del concepto de integral

Integrales de ciertas funciones discontinuas



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

Intervalos de integración infinitos

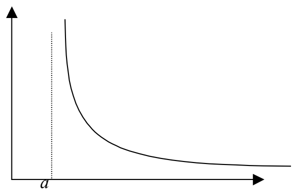


Si existe límite, integral impropia convergente.

Si no existe límite o es infinito, integral impropia divergente.

$$\exists a \in \Re, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Integrales de funciones no acotadas



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to a^+} \int_h^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to b^-} \int_a^h f(x)\,dx$$

2.6 Integrales dobles

A continuación se presenta un ejemplo de una integral doble

$$\int_{-1}^{2}\int_{3}^{6} 10xy^2\,dxdy \text{ , ó } \int_{3}^{6}\left(\int_{-1}^{2} 10xy^2\,dx\right)dy$$

Si se intercambian dx y dy, y los límites de integración, como se representa a continuación,

$$\int_{3}^{6}\int_{-1}^{2} 10xy^2\,dydx \text{ , ó } \int_{-1}^{2}\left(\int_{3}^{6} 10xy^2\,dy\right)dx \text{ ,}$$

obtenemos el mismo resultado.

Algunas veces se presentan variables como límites de integración como, por ejemplo, $\int_0^1\int_{x^2}^{x} 10xy^2\,dxdy$.

Aplicación de probabilidad.

Suponer que se arroja un dardo a una región R de un plano, y que éste cae en un punto (x,y) de R. Suponer que se desea conocer la probabilidad de que el dardo caiga en un punto (x,y) de la subregión rectangular G de R, donde $G=\{(x,y)\in R : a\le x\le b, c\le y\le d\}$. Entonces, ésta estaría dada por $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy$.

Cálculo de áreas de superficies.

Suponer la superficie limitada por las curvas $0\le x\le 2$ e $y\le x^2$. Calcular el área de la superficie.

---

3. Optimización en varias variables

3.1 Formulación general de un problema de optimización

3.2 Máximos y mínimos con nociones de topología

3.3 Conjuntos convexos y funciones cóncavas y convexas

3.4 Optimización sin restricciones

3.5 Optimización con restricciones de igualdad

En el cuatrimestre anterior estudiamos los problemas de optimización de funciones de una variable. Sin embargo, gran parte de los problemas de máximos y mínimos presentan funciones de varias variables. En este tema generalizaremos los conceptos y resultados de funciones de una variable que nos van a permitir resolver problemas económicos como, por ejemplo, la maximización/minimización de beneficios/costes de una empresa o las decisiones de compra de un consumidor. En la sección 3.1 presentaremos el problema matemático a resolver. En la sección 3.2 generalizaremos los conceptos de máximo y mínimo para funciones de varias variables. Además, se mostrarán ciertas nociones de topología del plano. En el caso de funciones de una variable, la mayoría de las funciones estaban definidas sobre intervalos. En el caso de las funciones con varias variables estudiaremos las principales propiedades de los distintos dominios. En la sección 3.3 trataremos los conceptos de conjunto convexo y de función cóncava y convexa. Finalmente, en las secciones 3.4 y 3.5 analizaremos los principales métodos de resolución de problemas de optimización, centrándonos en los problemas sin restricciones (sección 3.4) y en los problemas con restricciones de igualdad (sección 3.5).

3.1 Formulación general de un problema matemático

Los problemas de optimización se pueden describir de la siguiente forma. Tenemos una función objetivo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que es una función real de n variables de la que hay que hallar los valores máximos o mínimos. También tenemos un conjunto de restricciones o un conjunto de oportunidades S que es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. El problema consiste en hallar los máximos o mínimos de f en S, siempre y cuando existan.

$$\left.\begin{array}{l} \text{optimizar} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{sujeto a} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S \end{array}\right\}.$$

Encontramos distintos tipos de problemas de optimización dependiendo del conjunto S: (a) Problema clásico: sin restricciones. (b) Problema lagrangiano: con restricciones de igualdad. (c) Problema general de programación: con restricciones de desigualdad.

3.2 Máximos y mínimos con nociones de topología

Definición de máximo y mínimo

Sean $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función definida en un dominio $S \subset \mathbb{R}^n$ y $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in S$. Decimos que x^* es un **máximo global** de f en S si $f(x) \le f(x^*)$ para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$. A $f(x^*)$ se llama **valor máximo**. Análogamente definimos **mínimo global** y **valor mínimo** invirtiendo el signo de la desigualdad.

Utilizaremos los nombres de **óptimo** y **valor óptimo** para referirnos máximo o mínimo. Si x^* es un máximo (mínimo) global de f en S, entonces x^* es un mínimo (máximo) global de $-f$ en S.

Decimos que x^* es un **máximo local** de f en S si $f(x) \le f(x^*)$ para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$ suficientemente próximo a x^*. Análogamente definimos **mínimo local** invirtiendo el signo de la desigualdad.

Topología del plano

Un punto $x \in \mathbb{R}^2$ es un **punto interior** de un conjunto S del plano si existe un círculo con centro x totalmente contenido en S. Un conjunto se llama **abierto** si todos sus puntos son interiores. Un punto x es un **punto frontera** de un conjunto S del plano si todo círculo de centro x contiene puntos de S y puntos que no pertenecen a S. Si S contiene a todos sus puntos frontera decimos que S es un conjunto **cerrado**. Un conjunto es **acotado** si se puede encontrar un círculo que contenga completamente al conjunto. Un conjunto cerrado y acotado se llama **compacto**.

Teorema de Weierstrass o Teorema de los valores extremos

Si la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es continua en S, y el conjunto S es cerrado y acotado, entonces f alcanza en S su valor máximo y su valor mínimo.

El Teorema de Weierstrass no aporta un método para calcular el máximo y mínimo.

3.3 Conjuntos convexos y funciones cóncavas y convexas

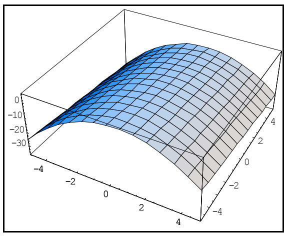
Conjuntos convexos

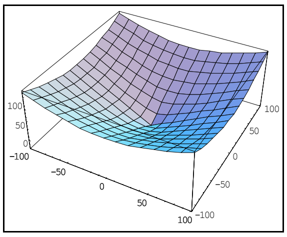
Un conjunto S de puntos del plano es **convexo** si se puede unir cada par de puntos de S por un segmento que esté totalmente contenido en S. Podemos extender esta definición de conjunto convexo a conjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si $x \in S, y \in S$ y $\lambda \in [0,1] \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in S$.

Funciones cóncavas y convexas

Generalizamos el concepto de función cóncava y convexa de una variable para funciones de varias variables cuyos dominios son conjuntos convexos.





Cóncava Convexa

Test de la derivada segunda para concavidad y convexidad: el caso de dos variables

Sea $z = f(x,y)$ una función con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden, definida sobre un conjunto abierto y convexo S del plano. Entonces

(a) f es cóncava en S $\Leftrightarrow$ $f''_{xx} \le 0, f''_{yy} \le 0$, y $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} \ge 0$

(b) f es convexa en S $\Leftrightarrow$ $f''_{xx} \ge 0, f''_{yy} \ge 0$, y $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} \ge 0$

donde las desigualdades se deben verificar para cada punto (x,y) de S.

Una variante del resultado anterior da condiciones suficientes de concavidad o convexidad estricta.

Sea $z = f(x,y)$ una función con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden, definida sobre un conjunto abierto y convexo S del plano. Entonces

(a) $f''_{xx} < 0$, y $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$ f es estrictamente cóncava en S

(b) $f''_{xx} > 0$, y $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow$ f es estrictamente convexa en S

donde las desigualdades se deben verificar para cada punto (x,y) de S.

Test de la derivada segunda para concavidad y convexidad: el caso de n variables

Sea $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ una función con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden en un dominio S de $\mathbb{R}^n$. Recordar que la **hessiana** o **matriz hessiana** de f en x es la matriz de dimensión $n \times n$:

$$H(x) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x) & \cdots & f''_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(x) & \cdots & f''_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Los **menores principales dominantes** de $H(x)$ son los n determinantes

$$D_k(x) = \begin{vmatrix} f''_{11}(x) & \cdots & f''_{1k}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{k1}(x) & \cdots & f''_{kk}(x) \end{vmatrix} \qquad (k = 1,\ldots,n).$$

Entonces, podemos generalizar los resultados obtenidos para funciones de dos variables.

(a) $(-1)^k D_k(x) > 0$ para $k = 1,2,\ldots,n$ y para todo $x \in S$ $\Rightarrow$ f estrictamente cóncava en S.

(b) $D_k(x) > 0$ para $k = 1,2,\dots,n$ y para todo $x \in S \Rightarrow f$ estrictamente convexa en S.

Para generalizar el primer resultado tenemos que considerar los signos de todos los menores principales de $H(x)$ y no sólo de los dominantes ($\Delta_r(x)$). Entonces

(a) f es cóncava en $S \Leftrightarrow$ para todo $\Delta_r(x)$ y todo $x \in S$, $(-1)^r \Delta_r(x) \geq 0$ para $r = 1,\dots,n$.

(b) f es convexa en $S \Leftrightarrow$ para todo $\Delta_r(x)$ y todo $x \in S$, $\Delta_r(x) \geq 0$ para $r = 1,\dots,n$.

3.4 Optimización sin restricciones

Sea f una función definida en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$. La formulación general del problema es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{optimizar } f(x_1,\dots,x_n) \\ \text{sujeto a} \\ (x_1,\dots,x_n) \in S \end{array}\right\}.$$

El punto $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es un **punto crítico** o **punto estacionario** de $f(x_1,\dots,x_n)$ si cumple:

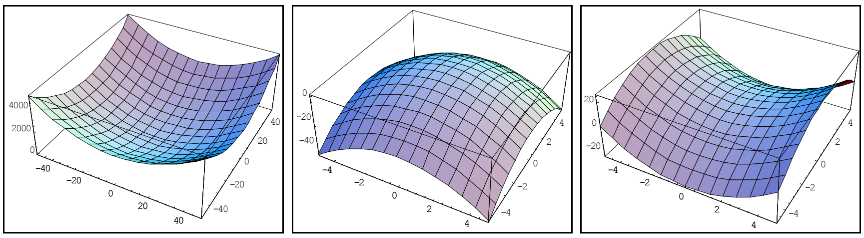
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0.$$

Condiciones necesarias de óptimo local

Sea f una función definida en un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ un punto interior de S en el que f es diferenciable. Una condición necesaria para que x^* sea un **máximo o mínimo local** de f es que x^* sea un punto crítico de f.

Todo máximo o mínimo local que sea interior debe verificar las condiciones necesarias de primer orden. La mayoría de las funciones que estudiamos son diferenciables.

Estas condiciones de primer orden son necesarias pero no son suficientes porque un punto estacionario no tiene por qué ser un óptimo local. Un punto estacionario que no sea ni un máximo ni un mínimo local se llama un **punto de silla**.



Mínimo Máximo Punto de silla

Condiciones suficientes de óptimo local

Estas condiciones están basadas en las derivadas segundas. Generalizan el criterio de la derivada segunda para funciones de una variable.

Test de la derivada segunda para funciones de dos variables

Sea $f(x,y)$ una función con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden en un dominio S, y sea (x^*,y^*) un punto interior de S que sea un punto crítico de f. Entonces,

(a) Si $f''_{xx}(x^*,y^*)<0$, y $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{yx}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow (x^*,y^*)$ es un máximo local.

(b) Si $f''_{xx}(x^*,y^*)>0$, y $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{yx}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow (x^*,y^*)$ es un mínimo local.

(c) Si $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{yx}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow (x^*,y^*)$ es un punto de silla.

(d) Si $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{yx}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x^*,y^*)$ puede ser un máximo local, un mínimo local, o un punto de silla.

Test de la derivada segunda para funciones de n variables

Sea $f(x_1,\ldots,x_n)$ una función con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden definida en un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ y sea x^* un punto crítico de f interior de S. Entonces:

(a) Si $(-1)^k D_k(x^*)>0,\ k=1,\ldots,n$, entonces x^* es un máximo local.

(b) $D_k(x^*)>0,\ k=1,\ldots,n$, entonces x^* es un mínimo local.

(c) Si $D_n(x^*)\neq 0$ y no se satisfacen ni (a) ni (b), entonces x^* es un punto de silla.

Estudio local

Cuando las condiciones suficientes de segundo orden no sean determinantes tenemos que recurrir a un estudio local de la función en el punto crítico.

Problemas convexos

Si se dan determinadas propiedades de convexidad, el problema de la búsqueda de óptimos se simplifica notablemente.

Sea $S\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y convexo. Sea $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ una función convexa (respectivamente, cóncava) y diferenciable en S. Entonces, f tiene un mínimo (respectivamente, máximo) global en $x^*\in S$ si y sólo si x^* es un punto crítico de f.

3.5 Optimización con restricciones de igualdad

Sea f una función definida en un conjunto $S\subset\mathbb{R}^n$. La formulación general del problema es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{optimizar } f(x_1,\ldots,x_n) \\ \text{sujeto a} \\ g_1(x_1,\ldots,x_n)=c_1 \\ \cdots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n)=c_m \end{array}\right\}.$$

El número m de restricciones tiene que ser menor que le número n de variables.

Algunas técnicas de resolución son las siguientes:

1) Método de sustitución.
2) Método de los multiplicadores de Lagrange.
3) Método de resolución gráfica.

1) *Método de sustitución*

Consiste en despejar una de las incógnitas de la restricción en términos de las otras variables, y sustituir dicha variable en la función objetivo. Este método es difícil de aplicar cuando la restricción es una función complicada, o cuando hay un sistema de ecuaciones para expresar las restricciones.

2) *Método de los multiplicadores de Lagrange*

Condición de regularidad

Definimos la **Matriz jacobiana** de $g=(g_1,g_2,\dots,g_m)$ como

$$Jg(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

La **condición de regularidad** es que el rango de la matriz jacobiana sea igual al número de restricciones m.

Condiciones necesarias de óptimo local

Definimos la función **Función lagrangiana** o **Lagrangiano** como

$$L(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n)-\lambda_1\left(g_1(x_1,\dots,x_n)-c_1\right)-\dots-\lambda_m\left(g_m(x_1,\dots,x_n)-c_m\right)$$

A los parámetros $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ se les llama **Multiplicadores de Lagrange**.

Condiciones necesarias

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_i}-\dots-\lambda_m\frac{\partial g_m}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,\dots,n).$$

Resolución práctica del problema de optimización:

n ecuaciones de las condiciones necesarias	=	$n+m$ Ecuaciones con las $n+m$ incógnitas $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m$.
m restricciones		

Condiciones suficientes de óptimo local

El **hessiano orlado** es el determinante de orden $n+m$.

$$Hf_{\lambda}(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Denotamos por $\left|\bar{H}_i\right|$ al determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_i} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_i} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_i} & \frac{\partial g_2}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_i} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2} \end{vmatrix}$$

Condiciones suficientes

Sea x^* un punto crítico del problema de optimización, entonces:

(a) Si todos los menores $\left|\bar{H}_{m+1}\right|,\left|\bar{H}_{m+2}\right|,\ldots,\left|\bar{H}_n\right|$ tienen el mismo signo que $(-1)^m$, entonces x^* es un mínimo local.

(b) Si el signo de $\left|\bar{H}_{m+1}\right|$ es el de $(-1)^{m+1}$ y los sucesivos menores $\left|\bar{H}_{m+2}\right|,\ldots,\left|\bar{H}_n\right|$ van alternando de signo, entonces x^* es un máximo local.

Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange (dos variables y una restricción de igualdad)

Considerar el siguiente problema de optimización

$$\left.\begin{array}{l} \max\ f(x,y) \\ \text{sujeto a} \\ g(x,y)=c \end{array}\right\}$$

Sean la solución (x^*, y^*) con multiplicador de Lagrange λ^* y la función valor óptimo $f^* = f(x^*, y^*)$.
Entonces, aplicando la regla de la cadena, podemos demostrar que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}c}(c) = \lambda^*}$$

Nota. El método de Lagrange no transforma un problema de optimización restringida en uno de hallar un óptimo no restringido de la función lagrangiana.

3) Método de resolución gráfica

Dado un problema de optimización

$$\left.\begin{array}{l} \max\ f(x,y) \\ \text{sujeto a} \\ g(x,y)=c \end{array}\right\}$$

Definimos,

<u>Las curvas de nivel de la función objetivo</u>: $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = k, \quad k \in \mathbb{R}\}$.

<u>Mapa de curvas de nivel</u>: conjunto de las curvas de nivel al variar la constante k.

<u>Propiedades del gradiente</u>:

(a) La dirección del gradiente de f en un punto es perpendicular a la recta tangente a la curva de nivel que pasa por dicho punto.

(b) La dirección del gradiente de f en un punto es aquella en la cual la correspondiente derivada direccional es máxima.

El vector gradiente nos dirige hacia curvas de nivel de valor más elevado.

<u>Conjunto factible</u>: Los puntos de $\mathbb{R}^2$ que verifican las restricciones del programa.