CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

CLASE AUXILIAR, JUEVES 31 DE MAYO 2007

Problema 1. Demuestre que las siguientes funciones son convexas:

(b) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = Ln(e^{x_1} + e^{x_2} + ... + e^{x_n})$

Sol. La idea era usar la fórmula de caracterización de funciones convexas.
f convexa ssi:

$$< \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y > \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Pensemos en el caso $\mathbb{R}^2$, o sea $\vec{z} = (x, y)$ y $\vec{w} = (u, v)$ (el otro queda propuesto, es lo mismo).

$$\nabla f(\vec{z}) = \frac{1}{e^x + e^y}(e^x, e^y)$$

$$\nabla f(\vec{w}) = \frac{1}{e^u + e^v}(e^u, e^v)$$

$$\Rightarrow < \nabla f(\vec{z}) - \nabla f(\vec{w}), \vec{z} - \vec{w} > = (\frac{e^x}{e^x + e^y} - \frac{e^u}{e^u + e^v})(x - u) + (\frac{e^y}{e^x + e^y} - \frac{e^v}{e^u + e^v})(y - v)$$

$$= \frac{(e^{y+u} - e^{x+v})(y + u - x - v)}{(e^x + e^y)(e^u + e^v)} \geq 0 \ \forall x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

Ya que la exponencial es creciente, y por lo tanto tiene el mismo signo ambos parentesis. Notar que en $\mathbb{R}^n$ son más paréntesis, pero el resultado es similar.