

CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

CLASE AUXILIAR, JUEVES 31 DE MAYO 2007

Problema 1. Demuestre que las siguientes funciones son convexas:

- (a) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 + \vec{x}^T \vec{x})^{\vec{x}^T \vec{x}}$
- (b) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln(e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n})$

Problema 2.

- (a) Utilizando adecuadamente la desigualdad de convexidad para la función $-\ln(\cdot)$ (que es convexa) demuestre que $\forall a, b, c \geq 0$ se cumple que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}$$

- (b) Resuelva el siguiente problema, usando Lagrangeano:

$$\text{Min } x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{s.a. } xyz = 1$$

$$x, y, z > 0$$

- (c) Usando adecuadamente la parte (b), redemuestre la desigualdad de la parte (a).

Problema 3. Encuentre los máximos y mínimos, si existen, para la función $f(x, y, z) = x + y + z$ en el conjunto:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

Dibuje la Región.

Problema 4. Calcular los extremos de la función $f(x, y) = 2x + y^2$ sobre el conjunto:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2; y^2 - x \leq 0\}$$

Problema 5. Dado el conjunto

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \geq 1 \right\}$$

y la función

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_2^2$$

Se desea encontrar el punto x_0 que minimiza la función f en el conjunto $\mathcal{C}$. En una primera etapa utilice su intuición y proponga un punto $\vec{x} \in \mathcal{C}$ que usted considere debería ser mínimo de f en $\mathcal{C}$. Luego, intente demostrar que ese punto es mínimo usando las condiciones vistas en clases. Es mínimo local o global?, es único?

Problema 6. Dada una matriz A de $n \times n$ simétrica definida positiva, $\vec{a}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Calcule el mínimo de la función $f(x) = x^T A x + c^T x$ sobre el conjunto:

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \beta\}$$

Calcule también el multiplicador de Lagrange λ . Justifique bien que el punto x_0 calculado es el mínimo de esta función en $\mathcal{C}$.

Para el caso particular en que $Q = I$, $a = (1, 1, \dots, 1)$, $c = \vec{0}$ y $\beta = 1$, compare el resultado con el problema anterior. Comente. (Recuerde que si A es definida positiva, ella es invertible y Q^{-1} también es definida positiva).