

CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

CLASE AUXILIAR, JUEVES 10 DE MAYO 2007

Problema 6. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática, es decir, $f(x) = x^T A x + b^T x + c$. Con $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Calcule el gradiente y la matriz Hessiana de f en todo punto. Qué sucede si A es simétrica y definida positiva?. Ahora considere el caso en que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A = I$ (la identidad, $b = (2, -2)$ y $c = 4$. Grafique f .

Sol: Podemos escribir

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{jk} x_j x_k + \sum_{k=1}^n x_k b_k + c$$

Ahora con esto, tenemos 3 casos: Si $i = j$, $i = k$ y $i = k = j$. Con esto obtenemos 3 partes:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ji} x_j + 2a_{ii} x_i + b_i$$

Reparto: $2a_{ii} x_i$ uno para cada suma:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j + b_i$$

Identificando el gradiente como:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Tenemos que:

$$\nabla f(x) = x^T A + x^T A^T + b$$

Ahora calculemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = a_{ik} + a_{ki}$$

Y recordando que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$ es el término ik del Hessiano de f , por lo tanto,

$$Hf(x) = A + A^T$$

Notemos también que si A es simétrica, entonces: $A = A^T$ y por lo tanto $Hf(x) = A + A^T = 2A$, y si A es definida positiva, el Hessiano también lo será.

Ahora por otro lado:

Podemos calcular el diferencial (gradiente) y el diferencial segundo (Hessiano) por definición: Como el diferencial es lineal, calculemoslo primero para $g(x) = x^T A x$.

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) - L(h) &= (x+h)^T A (x+h) - x^T A x - L(h) \\ &= x^T A x + x^T A h + h^T A x + h^T A h - x^T A x - L(h) = x^T A h + h^T A x + h^T A h - L(h) \end{aligned}$$

Considerando $L(h) = x^T A h + h^T A x$, tenemos que el diferencial de f es L , ya que $\frac{h^T A h}{\|h\|} \rightarrow 0$ (Por Cauchy-Schwarz).

Ahora identifiquemos el gradiente:

$$\begin{aligned} Dg(x)h &= x^T A h + h^T A x = x^T A h + x^T A^T h = \langle x^T A + x^T A^T, h \rangle \\ &\Rightarrow \nabla g(x) = x^T A + x^T A^T \end{aligned}$$

Con esto, aplicando el mismo procedimiento para calcular el segundo diferencial:

$$Dg(x+k)h - Dg(x)h - L'(k) = (x+k)^T Ah + (x+k)^T A^T h - x^T Ah - x^T A^T h - L'(k)$$

$$k^T Ah + k^T A^T h - L'(k), \Rightarrow L'(k) = k^T Ah + k^T A^T h = k^T (A + A^T)h$$

Se sigue que $D^2[g(x)h]k = k^T Ah + k^T A^T h = k^T (A + A^T)h$.

Y con esto, $Hg(x) = A + A^T$. Si A es simétrica, $Hg(x) = 2A$.

Calcular el diferencial de la función lineal $x^T b$ queda propuesto.