CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

CLASE AUXILIAR, JUEVES 10 DE MAYO 2007

Problema 1. Sea una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^1$. Suponer que $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$ y que además $f(x,0)>0$ para todo x. Probar que $f(a,b)>0$, $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Problema 2. Un subconjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ se dice convexo si los trazos rectos están contenidos en A. Sea $g:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, con A abierto, convexo y no vacío. Además g diferenciable en todo A. Demuestre que si $g'=0$ en todo A, entonces g es constante en A.

Problema 3. Se llama Laplaciano de una función $f(x,y)$ de clase $\mathscr{C}^2$ a:

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Expresar Δf en coordenadas polares, esto es, en función de las derivadas (primeras y segundas) de f respecto a ρ y θ, siendo $x=\rho\cos\theta$ e $y=\rho\sin\theta$.

Problema 4. Sea $a\in\mathbb{R}$; $a\neq 0$ y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con f de clase $\mathscr{C}^2$.
Sea:

$$F(x,y)=f(\frac{x^2-a^2}{y}+y)$$

Encuentre f tal que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$, $\Delta F=0$.

Problema 5. Sea $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Encuentre $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos veces diferenciable, tal que la función f definida por:

$$f(x,y)=\phi(x^2+y^2)$$

Satisface: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-3y\dfrac{\partial f}{\partial x}=xyf(x,y)$ para todo $(x,y)\neq(0,0)$ y $\phi(0)=0,\phi(1)=1$

Problema 6. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una forma cuadrática, es decir, $f(x)=x^TAx+b^Tx+c$. Con $A\in\mathscr{M}_{n\times n}$, $b\in\mathbb{R}^n$ y $c\in\mathbb{R}$. Calcule el gradiente y la matriz Hessiana de f en todo punto. ÀQue sucede si A es simétrica y definida positiva?. Ahora cosidere el caso en que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $A=I$ (la identidad, $b=(2,-2)$ y $c=4$. Grafique f.